

# งานและพลังงาน

## 1. บทนำ

หลักของงานและพลังงานเป็นหลักที่มีประโยชน์อย่างมากในฟิสิกส์ กฎการคงตัวของพลังงานสำหรับระบบโดดเดี่ยวเป็นกฎที่นักฟิสิกส์เชื่อว่าเป็นความจริง กฎนี้ทำให้เรารู้ได้ว่ากระบวนการใดบ้างที่ไม่มีทางเป็นไปได้ กระบวนการใดบ้างที่อาจเกิดขึ้นได้ เมื่อพูดถึงพลังงานเรามักนึกถึงความสามารถในการก่อให้เกิดการเปลี่ยนแปลง เช่น การเปลี่ยนสภาพการเคลื่อนที่หรือการเปลี่ยนรูปร่างของวัตถุ พลังงานมีหลายรูปแบบ แต่เราจะเริ่มต้นด้วยการศึกษาเกี่ยวกับพลังงานเชิงกลซึ่งประกอบด้วยพลังงานจลน์และพลังงานศักย์ พลังงานจลน์เป็นพลังงานที่มีเนื่องจากวัตถุมีการเคลื่อนที่หรือมีความเร็ว ส่วนพลังงานศักย์เป็นพลังงานที่ระบบมีเนื่องจากตำแหน่งของระบบที่อยู่ในสนามของแรง พลังงานทั้งสองชนิดนี้สามารถเปลี่ยนรูปกลับไปมาได้ พลังงานความร้อนอาจถือได้ว่าเป็นพลังงานจลน์เฉลี่ยของระบบที่ประกอบด้วยองค์ประกอบเล็ก ๆ จำนวนมหาศาล

เมื่อเราพูดถึงงาน เรานึกถึงการที่เราทำอะไรให้สำเร็จบางอย่าง และมักจะต้องใช้ความพยายามด้วย ตัวอย่างง่าย ๆ อาจเป็นการย้ายตำแหน่งของวัตถุหรือการเปลี่ยนรูปร่างวัตถุ พิจารณาการตอกเสาเข็ม เราต้องการย้ายตำแหน่งของเสาเข็มให้ลึกกลงไปในดิน เดิมเสาเข็มอยู่หนึ่ง ถ้าไม่มีแรงมาทำเพิ่มเติมเสาเข็มจะอยู่นิ่งต่อไปตามกฎนิวตันข้อที่หนึ่ง ดังนั้นต้องมีแรงมากระทำต่อเสาเข็มให้มีความเร็วเริ่มต้น แต่เมื่อเสาเข็มเคลื่อนที่ผ่านดินจะมีแรงเสียดทานทำให้เคลื่อนที่ช้าลงแล้วหยุดนิ่งในที่สุด จริง ๆ แล้วเราอาจพิจารณาการตอกเสาเข็มออกเป็นสามตอนด้วยกัน ตอนแรกเป็นการยกก้อนน้ำหนักขึ้นสูงแล้วปล่อยลงมาให้มีความเร็วขนาดหนึ่งก่อนกระทบเสาเข็ม ตอนที่สองเป็นการชนระหว่างเสาเข็มกับก้อนน้ำหนัก แรงที่ก้อนน้ำหนักทำต่อเสาเข็มในเวลาสั้น ๆ ทำให้เสาเข็มมีความเร็วที่จะเคลื่อนที่ไปในดิน เราอาจมองได้ว่าเป็นการถ่ายโมเมนตัมจากก้อนน้ำหนักให้เสาเข็ม ถ้าก้อนน้ำหนักมีมวลมาก ก็มีโมเมนตัมให้ถ่ายเทได้มาก ตอนที่สามเป็นตอนที่เสาเข็มเคลื่อนที่ไปในดิน มีแรงเสียดทานเนื่องจากดินทำให้เสาเข็มหยุดนิ่งเมื่อเคลื่อนที่ไปได้ระยะหนึ่ง จะเห็นได้ว่าทั้งสามตอนนั้นโดยเนื้อแท้เป็นการเปลี่ยนขนาดความเร็วของวัตถุจากอัตราเร็วหนึ่งเป็นอัตราเร็วอีกขนาดหนึ่ง ตอนแรกเป็นการเปลี่ยนอัตราเร็วของก้อนน้ำหนักจากหยุดนิ่งที่ความสูงขนาดหนึ่งไปให้มีอัตราเร็วขนาดหนึ่งก่อนที่จะกระทบเสาเข็ม ส่วนตอนที่สองเป็นการเปลี่ยนอัตราเร็วของเสาเข็มจากหยุดนิ่งก่อนที่ก้อนน้ำหนักตกกระทบไปให้มีอัตราเร็วขนาดหนึ่งหลังการกระทบทันที ตอนที่สามเป็นการเปลี่ยนอัตราเร็วเสาเข็มหลังจากการกระทบด้วยก้อนน้ำหนักไปเป็นศูนย์หลังจากที่เคลื่อนที่ฝังลงไปในดินได้ระยะทางหนึ่ง เพราะฉะนั้นเราจะเริ่มต้นด้วยการพิจารณาการเปลี่ยนอัตราเร็วของวัตถุ

## 2. ทฤษฎีงาน-พลังงานจลน์ในหนึ่งมิติ

เราเริ่มต้นด้วยการพิจารณาการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงก่อน เรียกแนวนี้ว่าแกน  $X$  และสมมุติว่าแรงสุทธิ  $F_x^{\text{สุทธิ}}$  ที่ทำมีขนาดคงตัว (เราจะขยายผลที่ได้เป็นกรณีทั่วไปที่แรงมีค่าไม่คงตัวภายหลัง) เราทราบว่าอนุภาคจะมีความเร็วเปลี่ยนไปก็ต่อเมื่อมีแรงมากระทำ และจะมีค่าเปลี่ยนไปมากเมื่อแรงที่มากระทำมีขนาดมากและทำเป็นเวลานานหรือพูดอีกอย่างหนึ่งก็คือเมื่ออนุภาคมีการกระจัดที่มีขนาดมาก เพื่อที่จะพิจารณาผลจากปริมาณทั้งสองพร้อมกัน เราพิจารณาผลคูณระหว่างแรงสุทธิ  $F_x^{\text{สุทธิ}}$  และการกระจัด  $\Delta x$  นั่นคือเราจะพิจารณา  $F_x^{\text{สุทธิ}} \Delta x$  เราต้องพยายามเปลี่ยนปริมาณนี้ให้อยู่ในรูปของอัตราเร็ว จากกฎนิวตันข้อที่สอง แรงสุทธิมีค่าเท่ากับมวลคูณความเร่งซึ่งเป็นอัตราการเปลี่ยนความเร็วเทียบกับเวลา ดังนั้น

$$F_x^{\text{สุทธิ}} \Delta x = ma\Delta x$$

โดยที่  $m$  และ  $a$  คือมวลและความเร่งของอนุภาคตามลำดับ .ในกรณีที่ความเร่งคงตัวเราได้ว่า

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \quad \text{และ} \quad \Delta x = \bar{v} \Delta t$$

ดังนั้น

$$F_x^{\text{สุทธิ}} \Delta x = ma\Delta x = m \frac{\Delta v}{\Delta t} \bar{v} \Delta t = m\bar{v} \Delta v$$

แต่ในกรณีที่ความเร่งคงตัวความเร็วเฉลี่ย  $\bar{v}$  มีค่าเท่ากับ  $\frac{1}{2}(v + u)$  และความเร็วที่เปลี่ยนไป  $\Delta v$  คือ  $v - u$  โดยที่  $u$  คือความเร็วต้น เพราะฉะนั้นเราจะได้ว่า

$$F_x^{\text{สุทธิ}} \Delta x = m\bar{v} \Delta v = m \frac{1}{2}(v + u)(v - u) = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mu^2$$

แม้ว่าสิ่งที่เราได้จะไม่ใช่การเปลี่ยนแปลงอัตราเร็วโดยตรง แต่ก็ทำให้เราสามารถหาอัตราเร็วใหม่ได้ถ้าเรารู้อัตราเร็วต้นและปริมาณ  $F_x^{\text{สุทธิ}} \Delta x$  เช่น ในตัวอย่างการตอกเสาเข็ม ตอนที่เราล่อยกอน้ำหนักลงมาเป็นระยะทางหนึ่ง แรงโน้มถ่วงกระทำต่อก่อนน้ำหนักในระยะทางหนึ่งทำให้มีอัตราเร็วขนาดหนึ่งก่อนที่จะกระทบเสาเข็ม ในทางกลับกันถ้าเรารู้อัตราเร็วต้นและอัตราเร็วปลายเราก็สามารถหา  $F_x^{\text{สุทธิ}} \Delta x$  ได้ และถ้าเรารู้แรงสุทธิเราก็จะหาได้ว่าวัตถุมีการกระจัดไปเท่าไร เราเรียกปริมาณแรงสุทธิคูณการกระจัดหรือ  $F_x^{\text{สุทธิ}} \Delta x$  ว่างานโดยแรงสุทธิเมื่อมีการกระจัด  $\Delta x$  ส่วนปริมาณหนึ่งส่วนสองคูณมวลคูณอัตราเร็วยกกำลังสอง หรือ  $\frac{1}{2}mv^2$  นั้นเรียกว่าพลังงานจลน์ซึ่งเป็นพลังงานเนื่องจากการมีอัตราเร็วเพราะเมื่อไปชนวัตถุอื่นจะทำให้มีแรงกระทำให้วัตถุอื่นเปลี่ยนสภาพการเคลื่อนที่หรือเปลี่ยนรูปร่างได้ เพื่อเป็นการเน้นว่าการใช้ความสัมพันธ์ข้างบนนั้นจะต้องมีตำแหน่งสองตำแหน่ง เราจะสมมุติว่าอนุภาคมีการกระจัดจากตำแหน่ง A ไปยังตำแหน่ง B และเขียนสมการข้างบนว่า

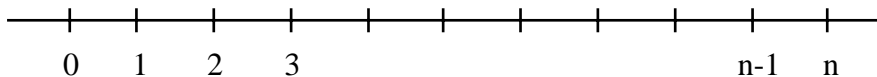
งานโดยแรงสุทธิเมื่ออนุภาคมีการกระจัดจาก A ไป B มีค่าเท่ากับผลต่างพลังงานจลน์จาก A ไป B

หรือ ถ้าให้  $W_{A \rightarrow B}^{\text{สุทธิ}}$  เป็นงานโดยแรงสุทธิเมื่ออนุภาคมีการกระจัดจาก A ไป B และให้  $E_k$  แทนพลังงานจลน์ เราเขียนสมการนี้ในรูปสัญลักษณ์ได้ว่า

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{สุทธิ}} = \Delta E_{k; A \rightarrow B}$$

ในกรณีที่แรงสุทธิมีค่าไม่คงตัว ความสัมพันธ์ข้างบนนี้ก็ยังคงเป็นจริงอยู่ เราพิสูจน์ดังนี้

แบ่งการเคลื่อนที่ออกเป็นช่วงสั้น ๆ จำนวนมาก โดยที่แต่ละช่วงสั้นมากจนประมาณได้ว่าแรงคงตัว ให้ตำแหน่งเริ่มต้นเป็นตำแหน่งที่ 0 ตำแหน่งปลายช่วงที่หนึ่งเป็นตำแหน่งที่ 1 ตำแหน่งต้นช่วงที่ 2 คือตำแหน่งที่ 1 และตำแหน่งปลายช่วงที่สองเป็นตำแหน่งที่ 2 ไปเรื่อย ๆ จนกระทั่งถึงช่วงสุดท้ายให้ตำแหน่งต้นช่วงเป็นตำแหน่งที่  $n-1$  และตำแหน่งปลายช่วงเป็นตำแหน่งที่  $n$  ดังรูป 2.1



รูป 2.1

เนื่องจากเราประมาณได้ว่าแรงคงตัวในแต่ละช่วง ดังนั้นจากที่เราได้ทำมา เราจะได้ว่า

$$W_{0 \rightarrow 1}^{\text{สุทธิ}} = \frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

$$W_{1 \rightarrow 2}^{\text{สุทธิ}} = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2$$

$$W_{2 \rightarrow 3}^{\text{สุทธิ}} = \frac{1}{2}mv_3^2 - \frac{1}{2}mv_2^2$$

.....

$$W_{n-1 \rightarrow n}^{\text{สุทธิ}} = \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{1}{2}mv_{n-1}^2$$

บวกสมการทั้งหมดเข้าด้วยกัน เราจะได้ว่า

$$W_{0 \rightarrow n}^{\text{สุทธิ}} = W_{0 \rightarrow 1}^{\text{สุทธิ}} + W_{1 \rightarrow 2}^{\text{สุทธิ}} + \dots + W_{n-1 \rightarrow n}^{\text{สุทธิ}} = \frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{1}{2}mv_0^2$$

หรือถ้าให้ A เป็นตำแหน่งตั้งต้นที่ 0 และ B เป็นตำแหน่งสุดท้ายที่ n เราจะได้ว่า

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{สุทธิ}} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = \Delta E_{k; A \rightarrow B}$$

ตามที่ต้องการพิสูจน์

### 3. ทฤษฎีงาน-พลังงานจลน์ในระนาบและในสามมิติ

ในกรณีการเคลื่อนที่ในระนาบ เลือกแกน X และแกน Y ที่ตั้งฉากกันเป็นแกนอ้างอิง และแตกแรงสุทธิและการกระจัดให้อยู่ในแนวทั้งสองนี้ เราสามารถใช้ผลที่ได้ทำมาแล้วสำหรับแต่ละแกนได้ นั่นคือ

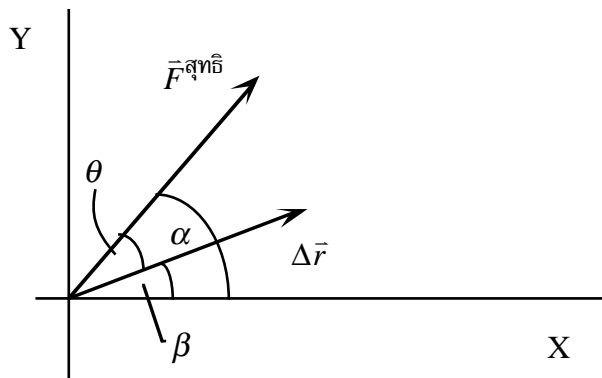
$$F_x^{\text{สุทธิ}} \Delta x_{A \rightarrow B} = \frac{1}{2} m v_{B,x}^2 - \frac{1}{2} m v_{A,x}^2 \quad \text{และ}$$

$$F_y^{\text{สุทธิ}} \Delta y_{A \rightarrow B} = \frac{1}{2} m v_{B,y}^2 - \frac{1}{2} m v_{A,y}^2$$

บวกสมการทั้งสองเข้าด้วยกัน เราจะได้

$$F_x^{\text{สุทธิ}} \Delta x_{A \rightarrow B} + F_y^{\text{สุทธิ}} \Delta y_{A \rightarrow B} = \frac{1}{2} m v_{B,x}^2 + \frac{1}{2} m v_{B,y}^2 - \frac{1}{2} m v_{A,x}^2 - \frac{1}{2} m v_{A,y}^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

โดยที่เราใช้ความรู้ที่ว่า  $v_x^2 + v_y^2 = v^2$  ซ้ายมือของสมการบนอยู่ในรูปขององค์ประกอบของแรงและการกระจัดซึ่งเป็นปริมาณที่ขึ้นกับการวางตัวของแกนอ้างอิง เราสามารถเปลี่ยนให้อยู่ในรูปของขนาดของแรงและขนาดของการกระจัดได้ดังนี้ ให้  $\alpha$  และ  $\beta$  เป็นมุมที่แรงและการกระจัดทำกับแกน X ดังรูป 3.1



รูป 3.1

เราเห็นได้ว่า  $F_x^{\text{สุทธิ}} = F^{\text{สุทธิ}} \cos \alpha$ ,  $F_y^{\text{สุทธิ}} = F^{\text{สุทธิ}} \sin \alpha$  และ  $\Delta x = \Delta r \cos \beta$ ,  $\Delta y = \Delta r \sin \beta$  โดยที่  $F^{\text{สุทธิ}}$  และ  $\Delta r$  คือขนาดของแรงสุทธิและการกระจัดตามลำดับ

ดังนั้น

$$\begin{aligned} F_x^{\text{สุทธิ}} \Delta x_{A \rightarrow B} + F_y^{\text{สุทธิ}} \Delta y_{A \rightarrow B} &= F^{\text{สุทธิ}} \cos \alpha \Delta r \cos \beta + F^{\text{สุทธิ}} \sin \alpha \Delta r \sin \beta \\ &= F^{\text{สุทธิ}} \Delta r (\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ &= F^{\text{สุทธิ}} \Delta r \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

โดยที่ในบรรทัดสุดท้ายเราได้ใช้เอกลักษณ์ทางตรีโกณมิติ ถ้าเราให้  $\theta$  เป็นมุมระหว่างแรงสุทธิและการกระจัดตั้งในรูป 3.1 เราจะได้ว่า

$$F_x^{\text{สุทธิ}} \Delta x_{A \rightarrow B} + F_y^{\text{สุทธิ}} \Delta y_{A \rightarrow B} = F^{\text{สุทธิ}} \Delta r \cos \theta$$

เราเรียกปริมาณนี้ว่างานโดยแรงสุทธิ

เราสามารถขยายนิยามนี้ออกไปยังกรณีการเคลื่อนที่ในสามมิติ ถ้าเราเลือกให้แกน X แกน Y และแกน Z เป็นแกนสามแกนที่ตั้งฉากกัน เราก็สามารถแสดงให้เห็นว่า

$$F_x^{\text{สุทธิ}} \Delta x_{A \rightarrow B} + F_y^{\text{สุทธิ}} \Delta y_{A \rightarrow B} + F_z^{\text{สุทธิ}} \Delta z_{A \rightarrow B} = F^{\text{สุทธิ}} \Delta r \cos \theta = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

เรามักใช้สัญลักษณ์  $W$  แทนงาน เพราะฉะนั้นเราเขียน  $W_{A \rightarrow B}^{\text{สุทธิ}}$  แทนงานโดยแรงสุทธิจาก A ไป B สมการบนจึงกลายเป็น

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{สุทธิ}} = \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2$$

โดยที่ 
$$W_{A \rightarrow B}^{\text{สุทธิ}} = F_x^{\text{สุทธิ}} \Delta x_{A \rightarrow B} + F_y^{\text{สุทธิ}} \Delta y_{A \rightarrow B} + F_z^{\text{สุทธิ}} \Delta z_{A \rightarrow B} = F^{\text{สุทธิ}} \Delta r \cos \theta$$

โดยการใช้เหตุผลในลักษณะเดียวกันกรณีการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง เราสามารถแสดงให้เห็นได้ว่าความสัมพันธ์ข้างบนนี้เป็นจริงในกรณีที่แรงมีค่าไม่คงตัวและการเคลื่อนที่เป็นแบบโค้งทั่วไป

แทนที่เราจะบวกแรงทั้งหมดแบบเวกเตอร์เป็นแรงสุทธิ แล้วหางานโดยแรงสุทธิ เราสามารถคำนวณงานโดยแรงสุทธิได้อีกวิธีหนึ่งดังนี้ สมมุติว่า

$$\vec{F}^{\text{สุทธิ}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots$$

ซึ่งหมายความว่า

$$F_x^{\text{สุทธิ}} = F_{1,x} + F_{2,x} + F_{3,x} + \dots, \quad F_y^{\text{สุทธิ}} = F_{1,y} + F_{2,y} + F_{3,y} + \dots, \quad F_z^{\text{สุทธิ}} = F_{1,z} + F_{2,z} + F_{3,z} + \dots$$

แทนค่าเหล่านี้ลงในนิยามของงานโดยแรงสุทธิ เราจะได้ว่า

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{สุทธิ}} = W_{A \rightarrow B}^{F_1} + W_{A \rightarrow B}^{F_2} + W_{A \rightarrow B}^{F_3} + \dots$$

โดยที่เราได้ให้นิยามงานโดยแรง  $\vec{F}_1$  เมื่อมีการกระจัดจาก A ไป B และ อื่น ๆ ดังนี้

$$W_{A \rightarrow B}^{F_1} = F_{1,x} \Delta x_{A \rightarrow B} + F_{1,y} \Delta y_{A \rightarrow B} + F_{1,z} \Delta z_{A \rightarrow B} = F_1 \Delta r \cos \theta_1 \text{ และอื่น ๆ}$$

ดังนั้นเราสามารถคำนวณงานโดยแรงสุทธิได้โดยการคำนวณงานโดยแรงอื่น ๆ ก่อน แล้วจึงเอางานทั้งหมดมาบวกกัน วิธีนี้อาจสะดวกกว่าเพราะเป็นการบวกปริมาณสเกลาร์ ในขณะที่ถ้าเราหางานโดยแรงสุทธิโดยตรง เราต้องบวกแรงทั้งหมดแบบเวกเตอร์ซึ่งเป็นการยากกว่า

หมายเหตุ: ในการคำนวณงาน เราต้องพูดให้ชัดเจนว่าเป็นงานที่กระทำต่ออนุภาคใดโดยแรงใดตามเส้นทางอะไร เราต้องบอกทุกปริมาณที่ขีดเส้นใต้ให้ครบ

เราจะพบว่ามีแรงหลายแรงที่งานโดยแรงเหล่านั้นมีค่าไม่ขึ้นกับเส้นทางการเคลื่อนที่และงานที่ได้ อยู่ในรูปสูตรที่ง่าย เราเรียกแรงชนิดนี้ว่าแรงอนุรักษ์ (conservative force) ตัวอย่างแรงเหล่านี้ที่สำคัญคือ แรงโน้มถ่วง แรงสปริง และแรงไฟฟ้าสถิต

## 4. งานโดยแรงสามัญบางแรง

### 4.1 งานโดยแรงคงตัว

พิจารณากรณีพิเศษที่แรงซึ่งกระทำต่ออนุภาคมีค่าคงตัว นั่นคือมีขนาดและทิศเดียวกันทุกแห่ง ตัวอย่างเช่นแรงโน้มถ่วงของโลกที่บริเวณผิวโลก

#### 4.1.1 งานที่ทำตามเส้นทางการกระจัดสั้น ๆ

ก่อนอื่นพิจารณางานที่ทำตามเส้นทางการกระจัดสั้น ๆ จากนิยามของงาน

$$W = F\Delta r \cos\theta$$

แต่  $\Delta r \cos\theta$  คือองค์ประกอบของการกระจัดในทิศของแรง เพราะฉะนั้นเราเขียนได้ว่า

$$\text{งาน} = \text{ขนาดของแรง} \times \text{องค์ประกอบของการกระจัดในทิศของแรง} \quad \text{หรือ} \quad W = F\Delta r_F$$

โดยที่  $\Delta r_F$  คือองค์ประกอบของการกระจัดในทิศของแรง

อีกทางหนึ่งเราอาจมองว่า  $F \cos\theta$  คือองค์ประกอบของแรงในทิศของการกระจัด และเขียนว่า

$$\text{งาน} = \text{องค์ประกอบของแรงในทิศของการกระจัด} \times \text{ขนาดของการกระจัด} \quad \text{หรือ} \quad W = F_{\Delta r} \Delta r$$

โดยที่  $F_{\Delta r}$  คือองค์ประกอบของแรงในทิศของการกระจัด

#### 4.1.2 งานที่ทำตามเส้นทางยาว ๆ

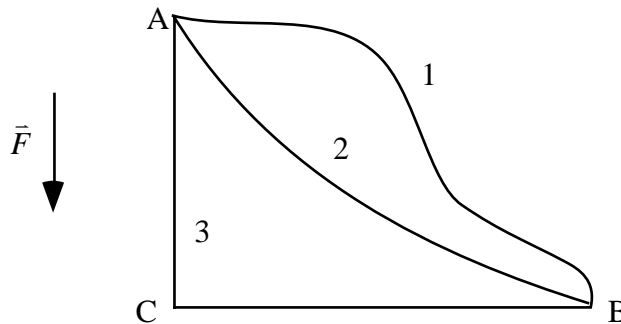
เนื่องจากในกรณีนี้แรงมีค่าคงตัว เราจะใช้ทิศของแรงเป็นทิศอ้างอิง และใช้นิยามงานในรูป  $W = F\Delta r_F$  เราแบ่งเส้นทางการเคลื่อนที่ออกเป็นช่วงสั้น ๆ ซึ่งประมาณว่าเป็นเส้นตรงได้ งานที่ทำทั้งหมดมีค่าประมาณเท่ากับผลบวกของงานในแต่ละช่วง

$$W = W_1 + W_2 + \dots = F\Delta r_{1F} + F\Delta r_{2F} + \dots = F(\Delta r_{1F} + \Delta r_{2F} + \dots)$$

เพราะว่าแรงมีขนาดเท่ากับ  $F$  ทุกแห่ง แต่  $\Delta r_{1F} + \Delta r_{2F} + \dots$  คือผลบวกขององค์ประกอบของการกระจัดทั้งหมดซึ่งมีค่าเท่ากับองค์ประกอบ  $D_F$  ของการกระจัดทั้งหมดในทิศของแรง ดังนั้น

$$W = FD_F \text{ เมื่อแรง } \vec{F} \text{ มีค่าคงตัว และ } D_F \text{ คือองค์ประกอบของการกระจัดทั้งหมดในทิศของแรง}$$

งานที่ได้ในกรณีนี้มีค่าขึ้นกับการกระจัดทั้งหมดจากจุดตั้งต้นไปยังจุดสุดท้าย แต่ไม่ขึ้นกับเส้นทางการเคลื่อนที่ ดังนั้นงานที่ทำโดยแรงคงตัวมีค่าเท่ากันหมดในทุกเส้นทางที่เชื่อมระหว่างจุดตั้งต้นไปยังจุดสุดท้ายคู่เดียวกัน

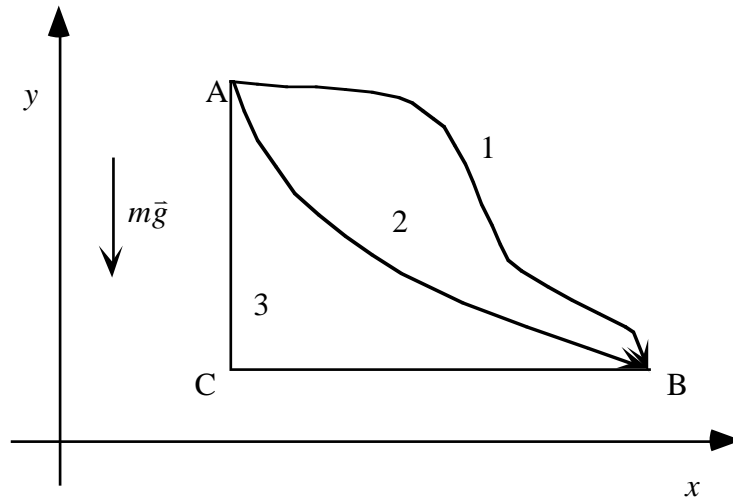


รูป 4.1.2

ในรูป 4.1.2 งานโดยแรง  $\vec{F}$  คงตัวบนเส้นทาง 1, 2 และ 3 มีค่าเท่ากันหมด เพราะมีองค์ประกอบของการกระจัดทั้งหมดในทิศของแรง  $\vec{F}$  เท่ากัน ดังนั้นในการคำนวณงานโดยแรงคงตัวไม่จริง ๆ แล้วอนุภาคจะเคลื่อนที่ไปบนเส้นทางซับซ้อนอย่างไร เราสามารถเลือกคำนวณบนเส้นทางที่ง่าย เช่น เส้นทาง 3 จาก A ไป C ไป B

### 4.1.3 งานโดยแรงโน้มถ่วง

ที่บริเวณผิวโลกเราอาจประมาณได้ว่าแรงโน้มถ่วงที่โลกกระทำต่อวัตถุมีมวลมีค่าเท่ากันทุกแห่ง ดังนั้นเราใช้ผลที่ได้ในหัวข้อ 4.1.2 ได้



รูป 4.1.3

งานโดยแรง  $m\bar{g}$  จาก A ไป B มีค่าเท่ากับ  $mg(y_A - y_B) = mgy_A - mgy_B$  โดยที่แกน Y เป็นแกนที่มีทิศชี้ขึ้นสวนกับทิศของ  $\bar{g}$  และ  $y_A, y_B$  คือพิกัดของ A และ B ในแนวแกน Y ตามลำดับ

### 4.1.4 งานโดยแรงเสียดทาน

พิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคหนึ่งบนพื้นราบ เนื่องจากไม่มีการเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง ขนาดของแรงปฏิกิริยาตั้งฉากที่พื้นกระทำต่ออนุภาคมีค่าเท่ากับขนาดของน้ำหนักของอนุภาคเสมอ แรงเสียดทานจลน์ที่พื้นกระทำต่ออนุภาคมีขนาดคงที่ด้วย แต่ว่าทิศของแรงเสียดทานไม่จำเป็นต้องคงที่เพราะว่าแรงเสียดทานมีทิศตรงข้ามกับการกระจัดของอนุภาคเทียบกับพื้นในขณะนั้นเสมอ

เมื่ออนุภาคมีการกระจัดเป็นระยะทาง  $\Delta s$  สั้น ๆ ไปตามเส้นทางการเคลื่อนที่ งานที่แรงเสียดทานกระทำต่ออนุภาคมีค่าเท่ากับ

$$f(-\Delta s) = -f\Delta s$$

เพราะว่าองค์ประกอบของการกระจัดของอนุภาคในทิศของแรงคือ  $-\Delta s$  งานมีค่าเป็นลบเพราะการกระจัดมีทิศตรงข้าม กับแรงเสียดทาน



งานที่แรงเสียดทานทำตลอดทั้งเส้นทางมีค่าเท่ากับผลบวกของงานในช่วงสั้น ๆ ทั้งหมด

$$W = (-f\Delta s_1) + (-f\Delta s_2) + \dots + (-f\Delta s_n) = -fL$$

โดยที่  $\Delta s_1, \Delta s_2, \dots$  คือระยะทางในช่วงที่ 1, 2, ... และ  $L$  เป็นระยะทางทั้งหมดที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปได้ เพราะฉะนั้น ในกรณีที่แรงเสียดทานมีค่าคงตัว

งานเนื่องจากแรงเสียดทาน = - ขนาดของแรงเสียดทาน คูณ ระยะทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปได้

หมายเหตุ: งานเนื่องจากแรงเสียดทานมีค่าขึ้นกับเส้นทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ไป เพราะระยะทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ขึ้นกับเส้นทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปจริง ๆ

#### 4.1.5 งานโดยแรงสปริง

แรงที่สปริงทำมีขนาดแปรผันตรงกับความยาวที่เปลี่ยนไปจากความยาวธรรมชาติตอนที่ยังไม่มีแรงใดกระทำ แต่มีทิศตรงข้ามกับความยาวที่เปลี่ยนไป นั่นคือ ถ้าสปริงยืดออก แรงสปริงจะดึงเข้า แต่ถ้าสปริงหดสั้นลง สปริงจะดันออก ในรูปของสัญลักษณ์

$$F = -kx$$

โดยที่  $F$  คือแรงที่สปริงทำ  $x$  คือความยาวที่เปลี่ยนไปจากความยาวธรรมชาติของสปริง และ  $k$  คือค่าคงตัวของสปริง เรียกอีกอย่างว่าค่าคงตัวของสปริง

พิจารณางานที่แรงสปริงทำต่ออนุภาคซึ่งผูกติดกับปลายของสปริงเมื่ออนุภาคเปลี่ยนตำแหน่งจาก  $x_A$  ไป  $x_B$  เนื่องจากแรงสปริงมีค่าไม่คงตัว เราต้องแบ่งการเคลื่อนที่ออกเป็นช่วงสั้น ๆ จนประมาณว่าแรงสปริงในแต่ละช่วงมีค่าคงตัว สมมุติว่าเราแบ่งการเคลื่อนที่ออกเป็นช่วงต่อไปนี้อย่างนี้  $x_0 \rightarrow x_1, x_1 \rightarrow x_2, \dots, x_{n-1} \rightarrow x_n$  โดยที่  $x_0$  คือ  $x_A$  และ  $x_n$  คือ  $x_B$

แรงสปริง  $F_1, F_2, \dots, F_n$  ในช่วงที่ 1, 2, ...,  $n$  มีค่าประมาณเท่ากับ  $-kx_1, -kx_2, \dots, -kx_n$  ตามลำดับ ดังนั้นงานที่แรงสปริงทำในแต่ละช่วงจะมีค่าประมาณดังนี้

$$\text{ช่วงที่ 1 } W_1 = -kx_1(x_1 - x_0)$$

$$\text{ช่วงที่ 2 } W_2 = -kx_2(x_2 - x_1)$$

...

$$\text{ช่วงที่ } n \text{ } W_n = -kx_n(x_n - x_{n-1})$$

เพื่อความสะดวกในการคำนวณ เราแบ่งให้การกระจัดในแต่ละช่วงเท่ากัน นั่นคือ แบ่งให้

$$x_1 - x_0 = x_2 - x_1 = \dots = x_n - x_{n-1} = \frac{x_n - x_0}{n} = \frac{\Delta x}{n}$$

เราจะได้ว่างานทั้งหมดมีค่าประมาณเท่ากับ

$$W_1 + W_2 + \dots + W_n = -kx_1 \frac{\Delta x}{n} - kx_2 \frac{\Delta x}{n} - \dots - kx_n \frac{\Delta x}{n} = -k \frac{\Delta x}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n)$$

แต่  $x_1 = x_0 + \frac{\Delta x}{n}$ ,  $x_2 = x_0 + 2 \frac{\Delta x}{n}$ , ...,  $x_n = x_0 + n \frac{\Delta x}{n}$

ดังนั้น  $(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = nx_0 + \frac{\Delta x}{n} (1 + 2 + \dots + n) = nx_0 + \frac{\Delta x}{n} \frac{n}{2} (n+1) = nx_0 + \frac{(n+1)\Delta x}{2}$

เพราะฉะนั้น งานทั้งหมดมีค่าประมาณ

$$W_1 + W_2 + \dots + W_n = -k \frac{\Delta x}{n} (x_1 + x_2 + \dots + x_n) = -k \frac{\Delta x}{n} \left[ nx_0 + \frac{(n+1)\Delta x}{2} \right]$$

ค่างานที่ถูกต้องเป็นค่าที่ได้เมื่อเราแบ่งช่วงให้สั้นมาก ๆ จนกระทั่งจำนวนช่วง  $n$  มีค่าเข้าหอนันต์ ในกรณีนี้  $n$  มีค่าประมาณเท่ากับ  $n+1$  และงานที่ทำมีค่าเท่ากับ

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 + \dots + W_n &= -k\Delta x \left[ x_0 + \frac{\Delta x}{2} \right] = -k(x_n - x_0) \frac{1}{2} (2x_0 + \Delta x) \\ &= -\frac{k}{2} (x_n - x_0)(x_0 + x_0 + \Delta x) \end{aligned}$$

แต่  $x_0 + \Delta x = x_n$  ดังนั้น

$$\begin{aligned} W_1 + W_2 + \dots + W_n &= -\frac{k}{2} (x_n - x_0)(x_0 + x_0 + \Delta x) = -\frac{k}{2} (x_n - x_0)(x_0 + x_n) \\ &= -\frac{k}{2} (x_n^2 - x_0^2) \end{aligned}$$

แต่  $x_0$  คือ  $x_A$  และ  $x_n$  คือ  $x_B$  ดังนั้น งานที่แรงสปริงทำต่ออนุภาคเมื่ออนุภาคเคลื่อนจาก  $x_A$  ไป  $x_B$  มีค่า

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{สปริง}} = \frac{1}{2} kx_A^2 - \frac{1}{2} kx_B^2$$

งานที่คำนวณได้นี้เป็นงานสำหรับการเคลื่อนที่ไปทางเดียว แต่ใช้ได้ไม่ว่าจะเป็นการเคลื่อนที่ซึ่งสปริงยืดออกหรือว่าหดเข้า สำหรับการเคลื่อนที่ซึ่งกลับทิศไปมา เราสามารถคำนวณได้โดยการแบ่งการเคลื่อนที่ออกเป็นตอน ๆ โดยให้แต่ละตอนเป็นการเคลื่อนที่ไปทางเดียว คำนวณงานที่ทำในแต่ละตอน แล้วเอาผลที่ได้มาบวกกัน ตัวอย่างเช่น งานเมื่ออนุภาคเคลื่อนที่จาก A ไป C แล้วย้อนทางกลับจาก C ไป B หาได้จาก

$$\begin{aligned} W_{A \rightarrow C \rightarrow B}^{\text{สปริง}} &= W_{A \rightarrow C}^{\text{สปริง}} + W_{C \rightarrow B}^{\text{สปริง}} = \left[ \frac{1}{2} kx_A^2 - \frac{1}{2} kx_C^2 \right] + \left[ \frac{1}{2} kx_C^2 - \frac{1}{2} kx_B^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} kx_A^2 - \frac{1}{2} kx_B^2 \end{aligned}$$

ดังนั้นไม่ว่าอนุภาคจะเคลื่อนที่กลับไปตามเส้นทางอย่างไร งานที่ทำโดยแรงสปริงจากจุด A แล้วไปจบที่จุด B มีค่า

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{สปริง}} = \frac{1}{2} kx_A^2 - \frac{1}{2} kx_B^2 \quad \text{เสมอ}$$

## 5. กำลัง

บ่อยครั้งเราสนใจเวลาที่ใช้ทำงานว่ามากน้อยแค่ไหน งานที่ทำในเวลาสั้นกว่าย่อมมีประสิทธิภาพสูงกว่างานเท่ากันที่ใช้เวลามากกว่า ดังนั้นเราสนใจอัตราการทำงาน

5.1 นิยาม *กำลังเฉลี่ย* ของแรงที่กระทำต่ออนุภาคในช่วงเวลาใดก็ตามมีค่าเท่ากับงานที่ทำโดยแรงนั้นหารด้วยเวลาที่ใช้

หน่วยของงานและกำลัง

โดยนิยามของงานว่าเป็นขนาดของแรงคูณกับองค์ประกอบของการกระจัดในทิศของแรง งานจึงมีหน่วยของแรงคูณกับระยะทาง ในระบบ SI หน่วยของงานคือ นิวตัน เมตร (N.m) ซึ่งมีชื่อเรียกอีกชื่อว่า จูล (joule) ใช้สัญลักษณ์ย่อว่า J

ดังนั้น หน่วยของกำลังในระบบ SI คือ จูลต่อวินาที ซึ่งมีชื่อเรียกอีกชื่อหนึ่งว่าวัตต์ (watt) ใช้สัญลักษณ์ย่อว่า W

## 5.2 กำลังที่เวลาขณะหนึ่ง

งานที่ทำโดยแรง  $\vec{F}$  ต่ออนุภาคเมื่ออนุภาคมีการกระจัด  $\Delta\vec{r}$  ลึ้น ๆ คือ  $|\vec{F}|\cos\theta|\Delta\vec{r}|$  โดยที่  $\theta$  คือมุมระหว่างแรงและการกระจัด

ดังนั้นกำลังที่แรงนี้ให้กับอนุภาคในช่วงเวลา  $\Delta t$  ลึ้น ๆ คือ

$$|\vec{F}|\cos\theta\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$$

ในกรณีที่ช่วงเวลาสั้นมากจนเข้าหาศูนย์ จะได้ว่ากำลังที่เวลานั้นคือ

$$P = |\vec{F}|\cos\theta|\vec{v}|$$

เพราะว่า  $\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t} = \left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right|$  คือขนาดของความเร็วของอนุภาคเมื่อช่วงเวลาเข้าหาศูนย์

## พลังงานศักย์และกฎพลังงาน

### 6. แรงอนุรักษ์

แรงคงตัว (แรงโน้มถ่วงที่ผิวโลก) และแรงสปริงมีลักษณะพิเศษตรงที่ว่างานที่ทำโดยแรงทั้งสองไม่ขึ้นกับเส้นทางการเคลื่อนที่หรืออัตราเร็วของอนุภาค แต่ขึ้นกับตำแหน่งตั้งต้นและตำแหน่งสุดท้ายของอนุภาคเท่านั้น แรงซึ่งมีคุณสมบัติเช่นนี้เรียกว่าแรงอนุรักษ์ เหตุที่เรียกว่าแรงอนุรักษ์เพราะแรงชนิดนี้ทำให้เราสามารถให้นิยามพลังงานเชิงกลซึ่งมีค่าคงตัว

นิยาม แรงอนุรักษ์ คือแรงซึ่งงานที่ทำโดยแรงนี้จากจุดหนึ่งไปยังจุดหนึ่งมีค่าเท่ากันในทุกเส้นทางซึ่งเชื่อมระหว่างจุดทั้งสอง

ตามที่กล่าวมาแล้ว แรงโน้มถ่วงคงตัวที่ผิวโลกและแรงสปริงเป็นแรงอนุรักษ์ แต่แรงเสียดทานไม่ใช่แรงอนุรักษ์

### 7. พลังงานศักย์เนื่องจากแรงอนุรักษ์

เนื่องจากงานโดยแรงอนุรักษ์ไม่ขึ้นกับเส้นทางการเคลื่อนที่ เราสามารถใช้ความจริงข้อนี้เป็นประโยชน์เมื่อเราต้องคำนวณงานที่ทำโดยแรงนั้นบนเส้นทางที่ซับซ้อนได้โดยเราเลือกเส้นทางง่าย ๆ ที่เชื่อมระหว่างจุดตั้งต้นและจุดสุดท้ายเดียวกัน

นอกจากนั้น ถ้าเราได้เคยคำนวณงานจากจุดใด ๆ ไปยังจุดอ้างอิงจุดหนึ่ง เราสามารถหางานที่ทำระหว่างสองจุดใด ๆ ได้จากงานที่เคยคำนวณไว้แล้วดังนี้

สมมุติว่าเราเลือกจุด S เป็นจุดอ้างอิง และเรารู้ว่างานที่ทำจากจุด A และ B ใด ๆ ไปยังจุด S มีค่าเท่าไร แทนที่เราจะเดินทางจาก A ไปยัง S โดยตรง เราอาจเดินทางผ่านไปทาง B ก่อน แล้วค่อยไปหา S เนื่องจากงานที่ทำโดยแรงอนุรักษ์ไม่ขึ้นกับเส้นทางการเคลื่อนที่ งานที่ทำบนเส้นทางทั้งสองมีค่าเท่ากัน นั่นคือ

$$W_{A \rightarrow S} = W_{A \rightarrow B} + W_{B \rightarrow S}$$

หรือ

$$W_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow S} - W_{B \rightarrow S}$$

สมการข้างบนแสดงให้เห็นว่างานระหว่างจุด A และจุด B สองจุดใด ๆ สามารถหาได้จากลบกันง่าย ๆ ถ้าเรารู้ค่างานที่ทำจากแต่ละจุดไปยังจุดอ้างอิง S ถ้าเราย้อนกลับไปดูรูปแบบคำตอบที่เราได้จากการคำนวณงานเนื่องจากแรงโน้มถ่วงคงตัวและแรงสปริง เราจะเห็นว่าคำตอบอยู่ในรูปแบบข้างบน

นั่นคือ

$$W_{A \rightarrow B}^{mg} = mgy_A - mgy_B$$

และ

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{สปริง}} = \frac{1}{2}kx_A^2 - \frac{1}{2}kx_B^2$$

รูปแบบของสมการของงานแนะว่าเราควรตั้งชื่อเฉพาะสำหรับงานจากจุดใด ๆ ไปยังจุดอ้างอิง เราให้นิยามปริมาณ  $U_A$  ดังนี้

$$U_A = W_{A \rightarrow S}$$

เราเรียกปริมาณนี้ว่าพลังงานศักย์ของอนุภาคที่จุด A เทียบกับจุดอ้างอิง S

นิยาม พลังงานศักย์  $U_A$  ที่จุด A ของอนุภาคเนื่องจากแรงอนุรักษ์เทียบกับจุดอ้างอิง S จุดหนึ่ง คืองาน  $W_{A \rightarrow S}$  ที่แรงอนุรักษ์กระทำต่ออนุภาคในการเคลื่อนที่ไปตามเส้นทางใด ๆ จากจุด A ไปยังจุดอ้างอิง S

ความสัมพันธ์ระหว่างงานและพลังงานศักย์ ในรูปของพลังงานศักย์ เราสามารถเขียนงานจากจุด A ไปยังจุด B ได้ว่า

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{แรงอนุรักษ์}} = U_A - U_B = -(U_B - U_A) = -\Delta U_{A \rightarrow B}$$

ดังนั้นถ้าเรารู้พลังงานศักย์ของอนุภาค เราสามารถคำนวณงานที่กระทำต่ออนุภาคโดยแรงอนุรักษ์ได้ง่าย ๆ จากค่าลบของพลังงานศักย์ที่เปลี่ยนไป

เนื่องจากพลังงานศักย์คืองานจากจุดหนึ่งไปยังจุดหนึ่ง จึงมีคุณสมบัติเหมือนกับงานโดยทั่วไป นั่นคือพลังงานศักย์เป็นปริมาณสเกลาร์ มีค่าเป็นบวก ลบ หรือศูนย์ก็ได้ ในระบบ SI พลังงานศักย์มีหน่วยเป็นจูล (J)

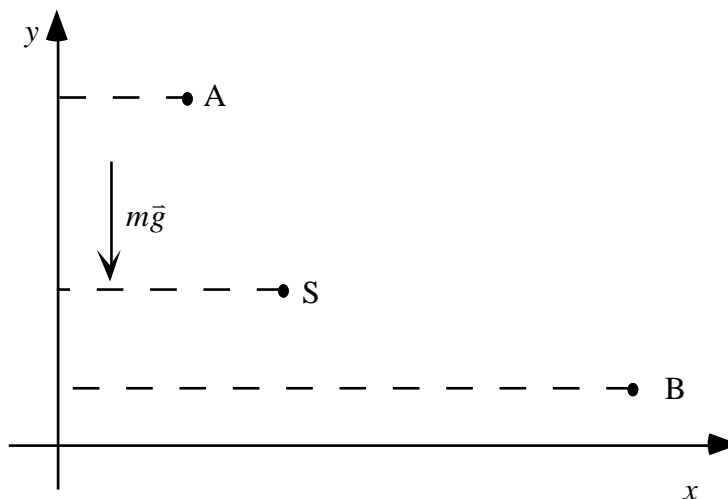
จากนิยามของพลังงานศักย์ พลังงานศักย์ที่จุดอ้างอิงคืองานที่แรงอนุรักษ์ทำในการเคลื่อนที่จากจุด S ไปแล้วกลับมาถึงจุด S เดิมบนเส้นทางใด ๆ และดังนั้นจึงมีค่าเท่ากับงานที่ทำการอยู่เฉย ๆ คือเท่ากับศูนย์ เพราะฉะนั้น ที่จุดอ้างอิง พลังงานศักย์มีค่าเท่ากับศูนย์

เราอาจเลือกจุดใดที่สะดวกเป็นจุดอ้างอิงก็ได้ ค่าของพลังงานศักย์ย่อมเปลี่ยนไปตามจุดอ้างอิงที่เลือก อย่างไรก็ตาม ผลต่างระหว่างพลังงานศักย์ที่จุดสองจุดใด ๆ มีค่าไม่ขึ้นกับจุดอ้างอิงที่เลือก แต่มีค่าเท่ากับงานที่ทำระหว่างจุดทั้งสองนั้น

ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ไปในทิศของแรง งานที่ทำโดยแรงนี้จะเป็นบวก ดังนั้นจากสมการข้างบน จะเห็นว่าพลังงานศักย์จะมีค่าลดลง ในทางกลับกัน ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ในทิศสวนกับทิศของแรง งานจะเป็นลบ และพลังงานศักย์ของอนุภาคมีค่าเพิ่มขึ้น

ตัวอย่าง 7.1 พลังงานศักย์เนื่องจากแรงโน้มถ่วงคงตัวที่ผิวโลก

ที่ผิวโลกอนุภาคมวล  $m$  ถูกแรงโน้มถ่วงคงตัว  $m\bar{g}$  กระทำในทิศลงตามแนวดิ่ง ในรูป 7.1 เราเลือกให้จุด  $S$  เป็นจุดอ้างอิง จุด  $A$  อยู่เหนือจุด  $S$  แต่จุด  $B$  อยู่ต่ำกว่าจุด  $S$



รูป 7.1

โดยนิยาม พลังงานศักย์ที่จุด  $A$  คือ

$$U_A = W_{AS} = mg(y_A - y_S) = mgh_A$$

แต่พลังงานศักย์ที่จุด  $B$  คือ

$$U_B = W_{BS} = mg(y_B - y_S) = mgh_B$$

โดยที่  $h_A$  และ  $h_B$  เป็นความสูงของอนุภาคที่จุด  $A$  และ  $B$  จากตำแหน่งอ้างอิง  $S$  ตามลำดับ ในที่นี้ เราให้  $h$  มีค่าเป็นบวกถ้าตำแหน่งของอนุภาคอยู่เหนือจุดอ้างอิง  $S$  และมีค่าเป็นลบถ้าจุดนั้นอยู่ต่ำกว่าจุดอ้างอิง  $S$  เพราะฉะนั้น โดยทั่วไปเราอาจเขียนได้ว่า

$$U = mgh$$

ตัวอย่าง 2.2 พลังงานศักย์ยืดหยุ่นของสปริง

ถ้าเราเลือกให้ตำแหน่งที่สปริงยาวตามธรรมชาติเป็นตำแหน่งอ้างอิง เราสามารถให้นิยามพลังงานศักย์ยืดหยุ่นของสปริงซึ่งมีค่าคงตัวสปริงเท่ากับ  $k$  ที่ตำแหน่ง  $x$  จากตำแหน่งอ้างอิงนี้ได้จาก

$$U_A = W_{A \rightarrow S} = \frac{1}{2} kx_A^2 - \frac{1}{2} kx_S^2$$

แทนค่า  $x_A = x$  และ  $x_S = 0$  เราจะได้ว่า 
$$U_x = \frac{1}{2} kx^2$$

## 8. กฎพลังงาน

ในหัวข้อที่แล้วเราได้เห็นว่าเราสามารถเขียนงานที่ทำโดยแรงอนุรักษ์ในรูปค่าลบของผลต่างพลังงานศักย์ได้ เราสามารถใช้ประโยชน์จากข้อสังเกตนี้โดยการแทนค่างานที่ทำโดยแรงอนุรักษ์ในกฎงาน-พลังงานจลน์

กฎงาน-พลังงานจลน์

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{สุทธิ}} = \frac{1}{2} mv_B^2 - \frac{1}{2} mv_A^2 = \Delta E_{k; A \rightarrow B}$$

ให้ความสัมพันธ์ระหว่างพลังงานจลน์ของอนุภาคที่เปลี่ยนไปกับงานสุทธิที่กระทำต่ออนุภาค แต่ว่างานสุทธินี้สามารถเขียนในรูปผลบวกของปริมาณสองปริมาณได้ว่า

$$W^{\text{สุทธิ}} = W^{\text{แรงอนุรักษ์}} + W^{\text{แรงอื่น}}$$

แต่ 
$$W^{\text{แรงอนุรักษ์}} = -\Delta U$$

ดังนั้น 
$$W^{\text{สุทธิ}} = -\Delta U + W^{\text{แรงอื่น}}$$

ในที่นี้พจน์แรกทางขวามือคืองานที่ทำโดยแรงอนุรักษ์ และ  $W^{\text{แรงอื่น}}$  คืองานโดยแรงอื่นที่ไม่ได้รวมเขียนในรูปของพลังงานศักย์ ถ้ามีแรงอนุรักษ์หลายแรง  $\Delta U$  จะเป็นพลังงานศักย์เนื่องจากงานโดยแรงอนุรักษ์ทั้งหมดที่เราเขียนให้อยู่ในรูปพลังงานศักย์

$$W^{\text{แรงอนุรักษ์}} = W_1^{\text{แรงอนุรักษ์}} + W_2^{\text{แรงอนุรักษ์}} + \dots = (-\Delta U_1) + (-\Delta U_2) + \dots = -\Delta U$$

โดยปกติเราจะเขียนงานโดยแรงอนุรักษ์*ทั้งหมด*ให้อยู่ในรูปพลังงานศักย์ที่เปลี่ยนไป  $W^{\text{แรงอื่น}}$  ซึ่งเป็นงานโดยแรงอื่นก็จะเป็นงานโดยแรงไม่อนุรักษ์อื่นทั้งหมด (เช่น แรงเสียดทานต่าง ๆ)



ถ้าเราแทน  $W^{\text{สุทธิ}} = -\Delta U + W^{\text{แรงอื่น}}$  ลงในกฎงาน-พลังงานจลน์ เราจะได้ว่า

$$W_{A \rightarrow B}^{\text{สุทธิ}} = -\Delta U_{A \rightarrow B} + W_{A \rightarrow B}^{\text{แรงอื่น}} = \Delta E_{k;A \rightarrow B}$$

ดังนั้น

$$\Delta E_{k;A \rightarrow B} + \Delta U_{A \rightarrow B} = \Delta(E_{k;A \rightarrow B} + U_{A \rightarrow B}) = W_{A \rightarrow B}^{\text{แรงอื่น}}$$

เราสามารถเขียนสมการข้างบนนี้ให้อยู่ในรูปง่าย ๆ ถ้าเราให้นิยามพลังงานทั้งหมดของอนุภาคซึ่งใช้สัญลักษณ์แทนด้วย  $E$  ดังนี้

นิยาม

$$\text{พลังงาน } E = E_k + U$$

โดยการใช้นิยามนี้เราสามารถเขียนความสัมพันธ์ข้างบนเสียใหม่ในรูปกฎพลังงานว่า

$$\Delta E_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow B}^{\text{แรงอื่น}}$$

กฎนี้กล่าวว่า พลังงานของอนุภาคที่เปลี่ยนไปมีค่าเท่ากับงานที่กระทำโดยแรงอื่น ๆ ที่ไม่ได้รวมในพลังงานศักย์ (ถ้างานโดยแรงอนุรักษ์ทั้งหมดเขียนอยู่ในรูปผลต่างพลังงานศักย์แล้ว งานโดยแรงอื่นก็จะเป็งานโดยแรงไม่อนุรักษ์ เช่นแรงเสียดทานเท่านั้น)

โดยนิยาม พลังงาน  $E$  มีหน่วยเดียวกับงาน พลังงานจลน์ และพลังงานศักย์ ในระบบ SI หน่วยของพลังงานคือจูล (J) พลังงานอาจมีค่าเป็นบวก ลบ หรือศูนย์ก็ได้ เพราะว่าพลังงานศักย์อาจมีขนาดและเครื่องหมายเป็นอะไรก็ได้

กฎพลังงานเป็นกฎที่ให้ความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่ของอนุภาค (พลังงานจลน์) กับอันตรกิริยาของอนุภาคกับวัตถุอื่น (พลังงานศักย์ และงานโดยแรงอื่น) กฎนี้ให้ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราเร็วและตำแหน่งของอนุภาคโดยตรงโดยที่ไม่มีเวลาเกี่ยวข้อง เราใช้กฎนี้เมื่อเราเจอปัญหาเกี่ยวกับตำแหน่งและอัตราเร็วที่ไม่สนใจเรื่องเวลา เราใช้กฎนี้กับปัญหาที่มีตำแหน่งสองตำแหน่ง ตำแหน่งหนึ่งเรารู้ว่าอยู่ที่ไหนและอนุภาคมีอัตราเร็วเท่าไร อีกตำแหน่งหนึ่งเป็นตำแหน่งที่เราอยากทราบว่าอยู่ที่ไหนถ้าเรารู้ว่าที่นั่นอนุภาคมีอัตราเร็วเท่าไร หรืออาจเป็นปัญหาที่เรารู้ตำแหน่งแต่ต้องการรู้ว่าที่ตำแหน่งนั้นอนุภาคมีอัตราเร็วเท่าไร

## 9. กฎการคงตัวของพลังงาน

ในกรณีพิเศษที่แรงทั้งหมดที่กระทำต่ออนุภาคเป็นแรงอนุรักษ์ (เช่น ไม่มีแรงเสียดทานใด ๆ ทำงานต่ออนุภาค) งานที่ทำโดยแรงทั้งหมดเขียนในรูปพลังงานศักย์ได้ ดังนั้นงานโดยแรงอื่นมีค่าเป็นศูนย์ ในกรณีนี้กฎพลังงานบอกเราว่า  $\Delta E = 0$  นั่นคือพลังงานของอนุภาคมีค่าคงตัว ไม่เปลี่ยนแปลง

$$\text{ถ้า } W^{\text{แรงอื่น}} = 0 \text{ จะได้ว่า } E = E_k + U = \text{ค่าคงตัว}$$

ในกรณีนี้เราพูดว่าพลังงานของอนุภาคมีค่าคงตัว แต่พลังงานจลน์และพลังงานศักย์แต่ละปริมาณอาจมีค่าเปลี่ยนไปได้โดยที่ผลบวกทั้งหมดยังคงมีค่าเท่าเดิมได้ นั่นคือพลังงานจลน์อาจเปลี่ยนรูปเป็นพลังงานศักย์ หรือพลังงานศักย์อาจเปลี่ยนรูปเป็นพลังงานจลน์ก็ได้โดยที่ทำให้พลังงานทั้งหมดมีค่าคงตัว

### ตัวอย่าง 9.1 การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์

พิจารณาการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ที่อนุภาคถูกแรงโน้มถ่วงคงตัวที่ผิวโลกกระทำ สมมุติว่าอนุภาคมวล  $m$  ถูกยิงขึ้นจากจุด A บนพื้นด้วยอัตราเร็ว  $u$  ทำมุม  $\theta$  กับแนวระดับ เราต้องการหาอัตราเร็ว  $v$  ของอนุภาคที่ความสูง  $h$  ใด ๆ จากพื้น

แรงโน้มถ่วงคงตัวที่ผิวโลกเป็นแรงอนุรักษ์ อันตรกิริยาระหว่างอนุภาคกับแรงโน้มถ่วงของโลกสามารถบรรยายแทนด้วยพลังงานศักย์โน้มถ่วง  $U = mgh$  และถ้าเราสมมุติว่าแรงต้านจากอากาศมีค่าน้อยมากจนถือว่าไม่มีแรงต้าน งานเนื่องจากแรงอื่นจะเป็นศูนย์ กฎพลังงานจึงบอกว่า

$$E = E_k + U = \frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{ค่าคงตัว}$$

ตลอดการเคลื่อนที่ของอนุภาคในระหว่างที่ลอยอยู่กลางอากาศ

ขณะที่อนุภาคเคลื่อนที่สูงขึ้นไป  $h$  มีค่ามากขึ้น ดังนั้นพลังงานศักย์  $U = mgh$  มีค่ามากขึ้นตามไปด้วย พลังงานจลน์และอัตราเร็วของอนุภาคจึงต้องมีขนาดลดลงเพื่อที่พลังงานทั้งหมด  $E$  มีค่าคงตัว ในทางกลับกันถ้าอนุภาคตกลงมา อัตราเร็วของอนุภาคจะมากขึ้น

พลังงานทั้งหมดมีค่าเท่ากับที่จุดตั้งต้น A ดังนั้น

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mu^2 + 0$$

ทำให้เราได้ว่า อัตราเร็วของอนุภาคที่ความสูง  $h$  มีค่า

$$v = \sqrt{u^2 - 2gh}$$

ขณะที่อนุภาคตกลงมาจะกระทบพื้น ความสูง  $h$  มีค่าเท่ากับศูนย์ ดังนั้นอัตราเร็วของอนุภาคตอนที่กระทบพื้นพอดีมีค่าเท่ากับอัตราเร็ว  $u$  ตอนตั้งต้น

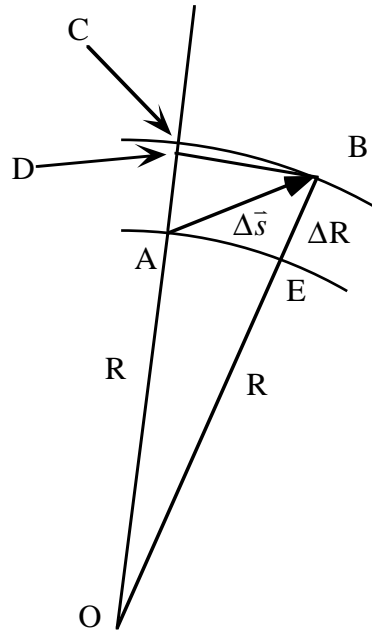
ถ้าแรงต้านจากอากาศมีค่ามากจนเราไม่คำนึงถึงไม่ได้ จะมีงานเนื่องจากแรงอื่นเป็นงานจากแรงเสียดทานของอากาศ แรงนี้มีทิศสวนทางกับการกระจัด และดังนั้นงานที่ทำโดยแรงนี้ต่ออนุภาคจึงมีค่าเป็นลบ จาก  $\Delta E_{A \rightarrow B} = W_{A \rightarrow B}^{\text{แรงอื่น}}$  จะเห็นได้ว่าพลังงานทั้งหมดมีค่าน้อยลง แต่เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่กลับมายังตำแหน่งที่สูงเท่าเดิม พลังงานศักย์โน้มถ่วงมีค่าเท่าเดิม ดังนั้นพลังงานจลน์ของอนุภาคต้องลดลง

## 10. แรงศูนย์กลางและพลังงานศักย์

แรงพื้นฐานในธรรมชาติ เช่น แรงโน้มถ่วงที่อนุภาคซึ่งมีมวลอนุภาคหนึ่งทำต่ออนุภาคที่มีมวลอีกอนุภาคหนึ่ง หรือแรงไฟฟ้าที่อนุภาคซึ่งมีประจุไฟฟ้าอนุภาคหนึ่งกระทำต่ออนุภาคที่มีประจุไฟฟ้าอีกอนุภาคหนึ่ง เป็นแรงที่แนวแรงมีทิศในแนวเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างอนุภาคและมีขนาดขึ้นกับระยะห่างระหว่างอนุภาคเท่านั้น เราเรียกแรงชนิดนี้ว่าแรงศูนย์กลาง เพราะเป็นแรงที่แนวแรงผ่านจุด ๆ หนึ่งเสมอ เราจะแสดงให้ดูว่าแรงชนิดนี้เป็นแรงอนุรักษ์และหาพลังงานศักย์ของอนุภาคเนื่องจากแรงนี้

ในการแสดงว่าแรงนี้เป็นแรงอนุรักษ์เราต้องแสดงให้เห็นว่า งานเนื่องจากแรงนี้ไม่ขึ้นกับเส้นทาง แต่ขึ้นกับตำแหน่งตั้งต้นและตำแหน่งสุดท้ายเท่านั้น เนื่องจากโดยทั่วไปแรงนี้ไม่ใช่แรงคงที่ ดังนั้นเราจำเป็นต้องแบ่งเส้นทางการเคลื่อนที่ออกเป็นช่วงสั้น ๆ หางานในแต่ละช่วงสั้น ๆ นี้ แล้วรวมงานทั้งหมดเป็นงานตลอดเส้นทางที่ต้องการ ดังนั้นในขั้นแรกเราต้องหางานที่ทำโดยแรงนี้ตามเส้นทางการกระจัดสั้น ๆ ก่อน

11. งานที่กระทำตามเส้นทางการกระจัดสั้น ๆ



รูป 11.1

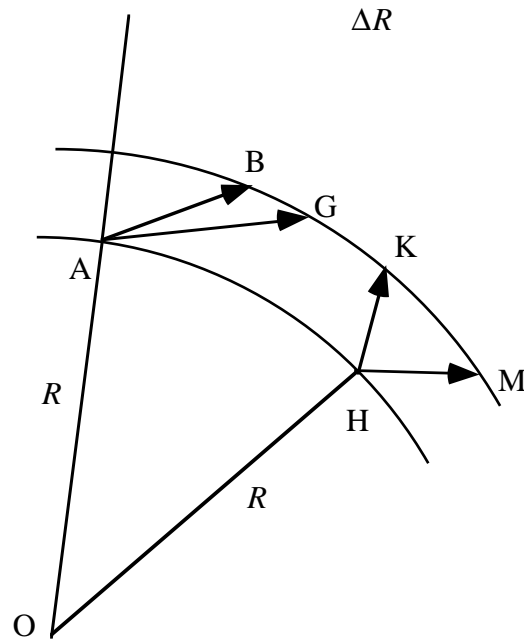
พิจารณานอนุภาคหนึ่งซึ่งถูกตรึงอยู่ที่ตำแหน่ง  $O$  ตำแหน่งหนึ่ง อนุภาคนี้ออกแรง  $\vec{F}$  กระทำต่ออีกอนุภาคหนึ่งซึ่งอยู่ที่ตำแหน่ง  $A$  ซึ่งอยู่ห่างจาก  $O$  เป็นระยะทาง  $R$  ให้แรงนี้เป็นแรงศูนย์กลาง ดังนั้นแนวที่แรงกระทำจะอยู่ในแนวรัศมี โดยที่ถ้าเป็นแรงผลัก แรงจะชี้ออกจาก  $O$  ไปตามแนวรัศมี แต่ถ้าเป็นแรงดูด แรงจะชี้เข้าศูนย์กลางตามแนวรัศมี นอกจากนั้น ขนาดแรง  $F$  มีค่าขึ้นกับระยะห่าง  $R$  จากจุด  $O$  ไปยัง  $A$  เท่านั้น สมมติว่าอนุภาคเคลื่อนที่จากจุด  $A$  ไปยังจุด  $B$  ใกล้เคียง ๆ เป็นการกระจัด  $\Delta\vec{s}$  สั้น ๆ โดยที่จุด  $B$  อยู่ห่างจากจุด  $O$  เป็นระยะทาง  $R + \Delta R$  ให้  $W$  เป็นงานที่กระทำโดยแรง  $\vec{F}$  เมื่ออนุภาคมีการกระจัดนี้

จากนิยามของงาน เราได้ว่า  $W = F\Delta s_F$

โดยที่  $F$  คือขนาดของแรง และ  $\Delta s_F$  คือองค์ประกอบของการกระจัดสั้น ๆ นี้ในทิศของแรง ในรูป 4.1  $\Delta s_F$  คือระยะ  $AD$  เนื่องจาก  $\Delta\vec{s}$  เป็นการกระจัดสั้น ๆ ระยะ  $AD$  มีค่าใกล้เคียงกับระยะ  $AC$  ซึ่งยาวเท่ากับ  $\Delta R$  ดังนั้นเราประมาณได้ว่า

$$W = F\Delta R$$

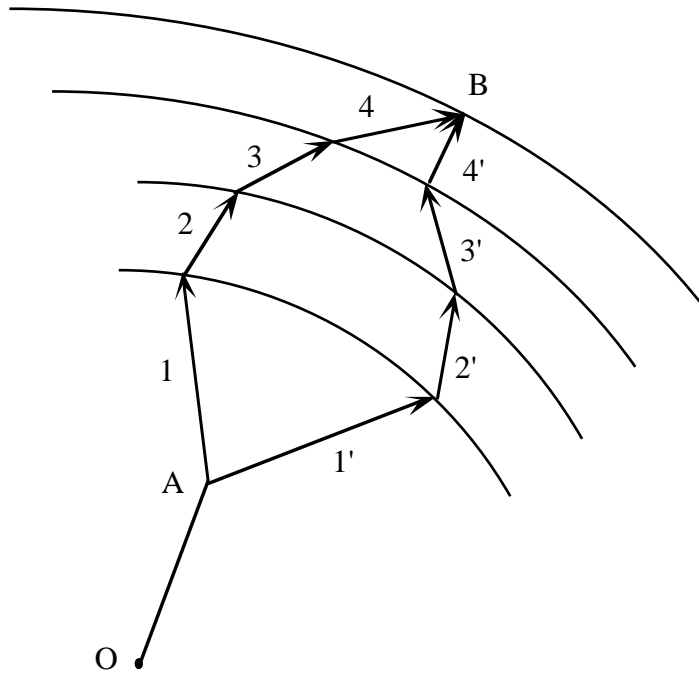
ถ้าแรง  $\vec{F}$  เป็นแรงผลัสดังรูป (หรือมีค่าเท่ากับ  $-F\Delta R$  ถ้าแรง  $\vec{F}$  เป็นแรงดูด)



รูป 11.2

เนื่องจากการงานตามการกระจัดสั้น ๆ มีค่าขึ้นอยู่กับองค์ประกอบในแนวรัศมีของการกระจัดเท่านั้น งานตามเส้นทางการกระจัด AB และ AG ในรูป 11.2 จึงมีค่าเท่ากัน นอกจากนั้นเนื่องจากขนาดของแรงขึ้นกับระยะห่างระหว่างอนุภาคเท่านั้น ขนาดของแรงที่จุด A และจุด H ซึ่งอยู่ห่างจาก O เท่ากัน จึงมีค่าเท่ากันด้วย ทำให้งานเนื่องจากแรงนี้ตามเส้นทาง HK และ HM มีค่าเท่ากับงานตามเส้นทางการกระจัด AB และ AG ด้วย (เพราะว่าองค์ประกอบตามแนวรัศมีของการกระจัดเหล่านี้มีค่าเท่ากัน)

ต่อไปเราพิจารณางานที่ทำต่ออนุภาคตามเส้นทางสองเส้นทางที่ต่างกันจากจุด A ไปยังจุด B ดังในรูป 4.3 เราแบ่งแต่ละเส้นทางออกเป็นการกระจัดสั้น ๆ ติดต่อกันดังรูป เส้นทางที่หนึ่งไปตามการกระจัด 1, 2, 3, 4 ส่วนเส้นทางที่สองไปตามการกระจัด 1', 2', 3', 4' โดยที่การกระจัดที่มีเลขตรงกัน เช่น 1 และ 1' เริ่มจากจุดที่อยู่ห่างจากจุด O เป็นระยะทาง  $R$  เท่ากันและไปจบลงที่จุดที่อยู่ห่างจากจุด O เป็นระยะทาง  $R + \Delta R$  เท่ากัน ดังนั้นงานที่ทำตามเส้นทาง 1 และ 1' มีค่าเท่ากัน งานที่ทำตามเส้นทาง 2 และ 2' มีค่าเท่ากัน และช่วงอื่นก็เช่นกัน เพราะฉะนั้นงานทั้งหมดที่ทำบนเส้นทางที่หนึ่งมีค่าเท่ากับงานทั้งหมดที่ทำบนเส้นทางที่สอง นั่นคือ งานที่ทำโดยแรงศูนย์กลางมีค่าไม่ขึ้นกับเส้นทางการเคลื่อนที่



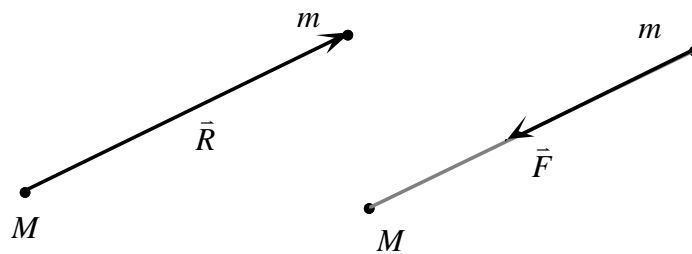
รูป 11.3

งานที่ทำโดยแรงโน้มถ่วงระหว่างอนุภาคมีมวลสองอนุภาค

แรงโน้มถ่วงที่อนุภาคมวล  $M$  ดึงอนุภาคมวล  $m$  ซึ่งอยู่ห่างกันเป็นระยะทาง  $R$  ดังในรูป 4.4 มีค่า

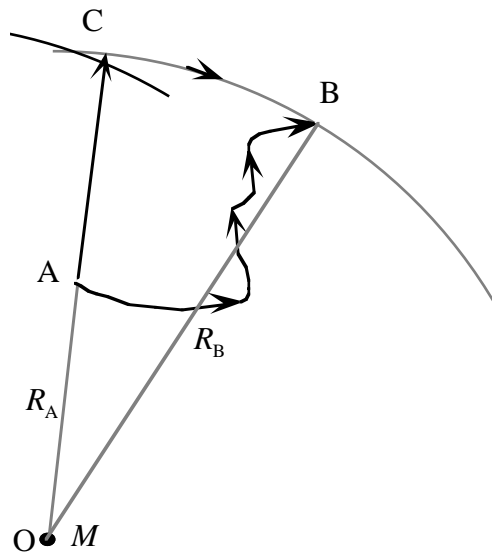
$$\vec{F} = \frac{GMm}{R^2}(-\hat{R})$$

โดยที่  $\vec{R}$  เป็นเวกเตอร์บอกตำแหน่งชี้จากอนุภาคมวล  $M$  ไปยังอนุภาคมวล  $m$  และ  $\hat{R}$  คือเวกเตอร์หนึ่งหน่วยในทิศนี้



รูป 11.4

สมมุติว่าอนุภาคมวล  $m$  เคลื่อนที่จาก A ไป B ตามเส้นทางคดไปมาดังในรูป 11.5 เราต้องการหาการทำงานที่ทำโดยแรงโน้มถ่วงตามเส้นทางนี้ เนื่องจากงานที่ทำโดยแรงโน้มถ่วงไม่ขึ้นกับเส้นทาง การเคลื่อนที่ เราสามารถคำนวณงานนี้ตามเส้นทางใดก็ได้ที่เริ่มต้นจากจุด A และจบที่จุด B เหมือนกัน ให้ O เป็นตำแหน่งของอนุภาคมวล  $M$  และ C เป็นจุดในแนวรัศมีเดิม OA ซึ่งอยู่ห่างจาก O เท่ากับรัศมี OB (ให้  $OA = R_A$  และ  $OB = R_B$ ) เราเลือกเส้นทางในการคำนวณตามเส้นจาก A ตรงไป C แล้วจาก C ไป B ตามส่วนโค้งของวงกลมดังรูป



รูปที่ 11.5

งานตามส่วนโค้ง CB มีค่าเป็นศูนย์ เพราะว่าแรงมีทิศในแนวรัศมีซึ่งตั้งฉากกับการกระจัดตามส่วนโค้งตลอดเวลา ดังนั้นงานจาก A ไป B มีค่าเท่ากับงานจาก A ไป C ตามแนวรัศมี

เพื่อที่จะหางานจาก A ไป C ตามแนวรัศมี เราแบ่งการกระจัดตามแนวนี้ออกเป็นช่วงสั้น ๆ จำนวนมหาศาล หารงานในแต่ละช่วงแล้วนำมาบวกกัน

พิจารณางานในช่วงสั้น ๆ จากรัศมี  $R_1$  ไปรัศมี  $R_2$  การกระจัดมีขนาดเท่ากับ  $R_2 - R_1$  เนื่องจากแรงมีขนาดไม่คงตัวแต่ขึ้นกับระยะห่างจากจุด O เราต้องใช้แรงเฉลี่ย เนื่องจากขนาดของแรงแปรผกผันกับ  $R^2$  ถ้าเราใช้  $R_1$  แทนระยะห่าง เราจะใช้แรงตัวแทนที่มีขนาดโตเกินไป แต่ถ้าเราใช้  $R_2$  แทนระยะห่าง เราจะใช้แรงตัวแทนที่มีขนาดเล็กเกินไป ดังนั้นเราเฉลี่ยโดยให้ตัวคูณหนึ่งเป็น  $R_1$  และอีกตัวคูณหนึ่งเป็น  $R_2$  นั่นคือ เราให้แรงเฉลี่ยในช่วงนี้มีค่าเท่ากับ

$$F_{1 \rightarrow 2} = \frac{GMm}{R_1 R_2}$$

เนื่องจากแรงมีทิศเข้า แต่การกระจัดมีทิศออก ดังนั้น งานจึงมีค่าเป็นลบ และมีค่าประมาณ

$$W_{1 \rightarrow 2} \approx -\frac{GMm}{R_1 R_2} (R_2 - R_1) = GMm \left( \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} \right)$$

ในทำนองเดียวกัน งานจากตำแหน่ง 2 ไป 3 ..... n-1 ไป n มีค่าประมาณ

$$W_{2 \rightarrow 3} \approx GMm \left( \frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_2} \right), \dots, W_{n-1 \rightarrow n} \approx GMm \left( \frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_{n-1}} \right)$$

เมื่อบวกงานทั้งหมดเข้าด้วยกันจาก 1 ไป n จะได้ว่า

$$W_{1 \rightarrow n} \approx GMm \left( \frac{1}{R_n} - \frac{1}{R_1} \right)$$

ให้ตำแหน่ง 1 เป็นตำแหน่ง A และตำแหน่งสุดท้าย n เป็นตำแหน่ง B และพิจารณาเมื่อการกระจัดแต่ละช่วงมีขนาดเล็กมากจนเข้าหาศูนย์ เราจะได้ค่าที่ถูกต้อง คือ

$$W_{A \rightarrow B} = GMm \left( \frac{1}{R_B} - \frac{1}{R_A} \right) = \left( -\frac{GMm}{R_A} \right) - \left( -\frac{GMm}{R_B} \right)$$

ถ้าเราเลือกให้จุดอ้างอิงของพลังงานศักย์โน้มถ่วงเป็นจุดที่อนันต์ เราจะได้ว่าพลังงานศักย์โน้มถ่วงที่จุด A ใด ๆ มีค่าเท่ากับ

$$U_A^{\text{โน้มถ่วง}} = W_{A \rightarrow \infty}^{\text{โน้มถ่วง}} = -\frac{GMm}{R_A}$$

ในทำนองเดียวกัน งานที่ทำโดยแรงคูลอมบ์  $\vec{F} = k_E \frac{Qq}{R^2} \hat{R}$  ระหว่างอนุภาคมีประจุไฟฟ้าสองประจุ  $Q$  และ  $q$  จากตำแหน่งซึ่งเดิมห่างกัน  $R_A$  ไปอยู่ในตำแหน่งที่ห่างกัน  $R_B$  มีค่า

$$W_{A \rightarrow B} = k_E \frac{Qq}{R_A} - k_E \frac{Qq}{R_B}$$

ถ้าเราเลือกให้จุดอ้างอิงของพลังงานศักย์ไฟฟ้าอยู่ที่อนันต์ เราจะได้ว่าพลังงานศักย์ไฟฟ้าที่จุด A ใด ๆ มีค่าเท่ากับ

$$U_A^{\text{ไฟฟ้า}} = W_{A \rightarrow \infty}^{\text{ไฟฟ้า}} = k_E \frac{Qq}{R_A}$$



## แบบฝึกหัด

1. ดาวเทียมมวล  $m$  ดวงหนึ่งโคจรเป็นวงกลมรอบโลกมวล  $M$  รัศมี  $R_E$  ที่ความสูง  $H$  จากผิวโลก จงหาพลังงานทั้งหมดของดาวเทียมนี้ ถ้าให้พลังงานศักย์โน้มถ่วงของดาวเทียมเป็นศูนย์ที่ระยะอนันต์จากโลก ให้ตอบในรูปตัวแปรที่ให้มาและค่าความเร่ง  $g$  เนื่องจากแรงโน้มถ่วงที่ผิวโลก
2. ถ้าต้องการยิงกานิวเคลียร์มวล  $m$  ให้หลุดพ้นออกไปจากโลก จะต้องยิงออกไปด้วยอัตราเร็วอย่างน้อยที่สุดเท่าไร ให้ตอบในรูปตัวแปรที่ให้มาและค่าความเร่ง  $g$  เนื่องจากแรงโน้มถ่วงที่ผิวโลก
3. ในแบบจำลองอะตอมไฮโดรเจนของ Bohr อะตอมประกอบด้วยอนุภาคโปรตอนเป็นนิวเคลียสอยู่หนึ่งและมีอิเล็กตรอนโคจรเป็นวงกลมรอบนิวเคลียส โปรตอนมีประจุไฟฟ้า  $+e$  ส่วนอิเล็กตรอนมีประจุ  $-e$  อนุภาคทั้งสองออกแรงไฟฟ้าดูดกัน

จงแสดงให้เห็นว่าพลังงานจลน์ของอิเล็กตรอนมีขนาดเป็นครึ่งหนึ่งของขนาดพลังงานศักย์ไฟฟ้าของระบบ (ให้สมมติว่ารัศมีการโคจรเท่ากับ  $r$  และอิเล็กตรอนมีมวล  $m$ )

ถ้าอิเล็กตรอนเปลี่ยนสถานะจากที่โคจรที่รัศมี  $r_1$  มาอยู่ในวงโคจรซึ่งมีรัศมี  $r_2$  ระบบจะมีพลังงานเปลี่ยนไปเท่าไร ให้หาพลังงานของระบบที่เปลี่ยนไปนี้ (ในการเปลี่ยนสถานะนี้จะมีการปล่อยอนุภาคโฟตอน (แสง) ออกมา หรือมีการดูดโฟตอนเข้าไป)