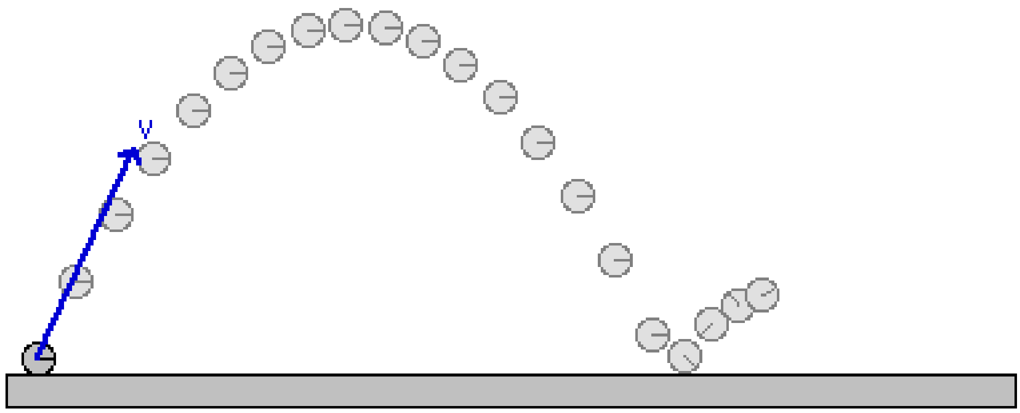
การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์



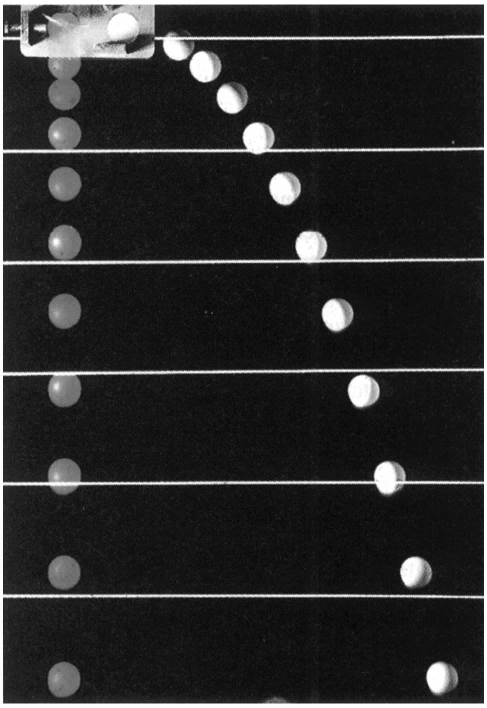
รูป 0

การเคลื่อนที่ของวัตถุที่ถูกปาหรือยิงออกไปในอากาศเรียกว่า*การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์* เมื่อเราปาลูกบอลหรือก้อนหินไปในอากาศให้ทำมุมเฉียง ๆ กับแนวดิ่ง เราจะเห็นลูกบอลเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้ง แสดงว่าต้องมีแรงกระทำต่อลูกบอลให้เปลี่ยนแนวการเคลื่อนที่ นอกจากแรงโน้มถ่วงของโลกที่กระทำต่อวัตถุแล้ว ลูกบอลจะได้รับอิทธิพลจากแรงต้านอากาศและการหมุนของโลกด้วย นอกจากนั้นแรงดึงดูดที่โลกกระทำต่อลูกบอลก็ไม่คงที่ด้วย แต่เพื่อความง่ายในการพิจารณาในชั้นนี้ เราจะไม่คำนึงถึงสิ่งเหล่านี้

เราจะสมมุติว่าลูกบอลถูกกระทำด้วยแรงโน้มถ่วงคงที่ในแนวดิ่งเพียงอย่างเดียว ซึ่งทำให้

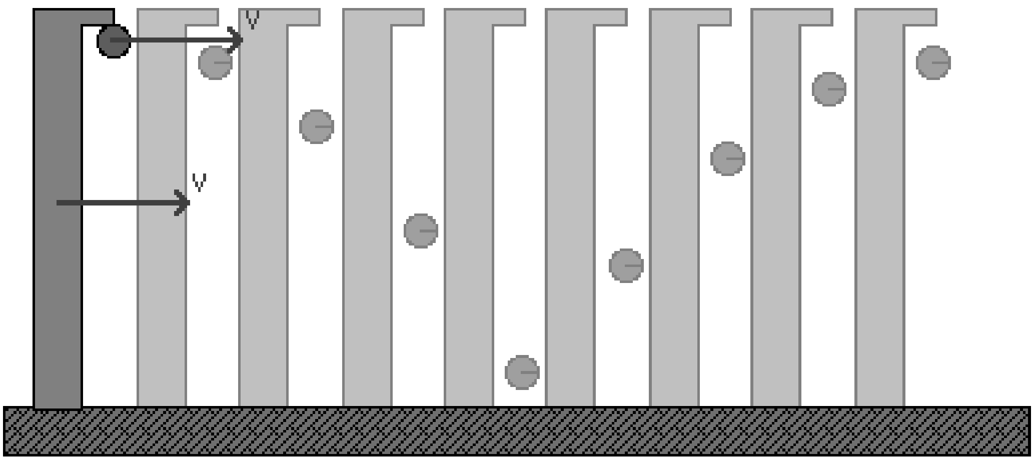
1. ลูกบอลเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงที่ในแนวดิ่ง และ
2. ความเร่งในแนวนอนเป็นศูนย์ ซึ่งหมายความว่าความเร็วในแนวนอนมีค่าคงตัว

ในการคำนวณ เราสามารถมองได้ว่าการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ประกอบด้วยการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งและแนวนอนซึ่ง *เป็นอิสระต่อกัน* และเกิดขึ้นพร้อมกัน การทดลองในรูป 1 แสดงให้เห็นว่าการเคลื่อนที่แนวระดับไม่มีผลต่อการเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง ในการทดลองนี้เราปล่อยให้ลูกบอลสองลูกเคลื่อนที่จากที่สูงเดียวกัน ลูกหนึ่งปล่อยให้ตกลงมาเฉย ๆ ด้วยความเร็วเป็นศูนย์ ส่วนอีกลูกหนึ่งมีความเร็วต้นในแนวระดับที่ไม่เป็นศูนย์ แต่มีความเร็วต้นในแนวดิ่งเป็นศูนย์เหมือนกับลูกแรก จากรูป จะเห็นได้ว่าการเคลื่อนที่ในแนวดิ่งของลูกบอลทั้งสองเหมือนกัน คือมีตำแหน่งในแนวดิ่งที่เวลาใด ๆ เหมือนกัน แม้ว่าจะมีความเร็วต้นในแนวระดับต่างกัน แสดงว่า *การเคลื่อนที่ในแนวดิ่งไม่ขึ้นกับการเคลื่อนที่ในแนวระดับ*



รูป 1

ในรูป 2 เดิมลูกบอลห้อยอยู่กับเสาซึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปบนพื้นระดับด้วยความเร็วคงตัว แล้วหลุดออกจากที่จับ ก่อนหน้าที่จะหลุด วัตถุทั้งสองมีความเร็วในแนวระดับเท่ากัน และดังนั้นทันทีที่หลุดก็ยังมีความเร็วเท่ากันในแนวระดับ แต่ว่าที่เวลาต่อมา ลูกบอลจะเคลื่อนที่ด้วยความเร่งในแนวดิ่งเนื่องจากแรงโน้มถ่วงของโลก ในขณะที่เสายังเคลื่อนที่ไปข้างหน้าบนโต๊ะลื่นด้วยความเร็วในแนวระดับเท่าเดิม ภาพที่เวลาต่อ ๆ มาแสดงให้เห็นว่าตำแหน่งในแนวดิ่งของลูกบอลเปลี่ยนไป แต่ว่าระยะห่างในแนวระดับระหว่างลูกบอลและเสายังเท่าเดิมตลอดเวลา แสดงว่าความเร็วในแนวระดับของลูกบอลยังเท่าเดิมอยู่ เราจึงสรุปได้ว่า *การเคลื่อนที่ในแนวดิ่งไม่มีผลต่อการเคลื่อนที่ในแนวระดับ*



รูป 2

จากผลการทดลองทั้งสองข้างต้น เราสรุปได้ว่า *การเคลื่อนที่ในแนวดิ่งและแนวระดับไม่มีผลต่อกันและกัน* ดังนั้นเราจะมองว่าการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ประกอบด้วย

1. การเคลื่อนที่ในแนวระดับด้วยความเร่งเท่ากับศูนย์ และ

2. การเคลื่อนที่ในแนวดิ่งด้วยความเร่งคงตัว ขนาดประมาณ $9.8\ \mathrm{m/s^2}$ ในทิศลง (มักประมาณว่าขนาดความเร่งเท่ากับ $10\ \mathrm{m/s^2}$ และแทนด้วยสัญลักษณ์ g)

สมการของการเคลื่อนที่ในระนาบด้วยความเร่งคงตัว

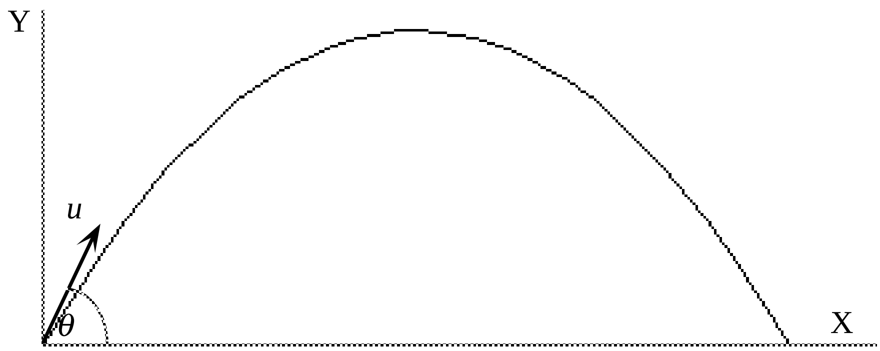
เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว องค์ประกอบของความเร่งในทิศ $\hat{\mathrm{x}}$ และทิศ $\hat{\mathrm{y}}$ ใด ๆ ที่ตั้งฉากกันมีค่าคงตัวด้วย อนุภาคจะมีการกระจัดไปในทิศ $\hat{\mathrm{x}}$ และทิศ $\hat{\mathrm{y}}$ อย่างเป็นอิสระต่อกันแต่พร้อมกัน *การเคลื่อนที่ซึ่งเกิดขึ้นจริง ๆ สามารถมองได้ว่าประกอบด้วยการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงสองแนวที่ตั้งฉากกัน พร้อม ๆ กัน* เรามักเลือกให้ทิศ $\hat{\mathrm{x}}$ เป็นทิศตามแนวระดับ และทิศ $\hat{\mathrm{y}}$ เป็นทิศในแนวดิ่ง ความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัด ความเร็วและความเร่งในแต่ละแนวเป็นดังนี้

$$
\begin{aligned}
&v_x = u_x + a_x\Delta t, \quad \bar{v}_x = \tfrac{1}{2}(u_x + v_x) && v_y = u_y + a_y\Delta t, \quad \bar{v}_y = \tfrac{1}{2}(u_y + v_y) \\
&\Delta x = \bar{v}_x\Delta t, \qquad \Delta x = u_x\Delta t + \tfrac{1}{2}a_x(\Delta t)^2 && \Delta y = \bar{v}_y\Delta t, \qquad \Delta y = u_y\Delta t + \tfrac{1}{2}a_y(\Delta t)^2 \\
&v_x^2 = u_x^2 + 2a_x\Delta x && v_y^2 = u_y^2 + 2a_y\Delta y
\end{aligned}
$$

สำหรับการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ ความเร่งในแนวนอนมีค่าเป็นศูนย์ ความเร็วในแนวนอนมีค่าคงตัว ดังนั้น

$$
\begin{aligned}
&v_x = u_x, \quad \bar{v}_x = u_x \\
&\Delta x = u_x\Delta t
\end{aligned}
$$

ในการเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์ ความเร็วต้นของการเคลื่อนที่มักไม่ได้อยู่ในแนวดิ่งหรือแนวนอน แต่ทำมุมขนาดหนึ่งกับแนวนอน ดังนั้นถ้ากำหนดมาว่าความเร็วต้นมีขนาดเท่ากับ u และทำมุม θ กับแนวนอน เราต้องหาว่าความเร็วต้นในแนวดิ่งและแนวนอนเป็นเท่าไรก่อน



จากรูปข้างบน เราได้ทันทีว่าความเร็วต้นในแนวนอนและแนวดิ่งมีค่า $u_x = u\cos\theta$ และ $u_y = u\sin\theta$ ตามลำดับ

ตัวอย่าง

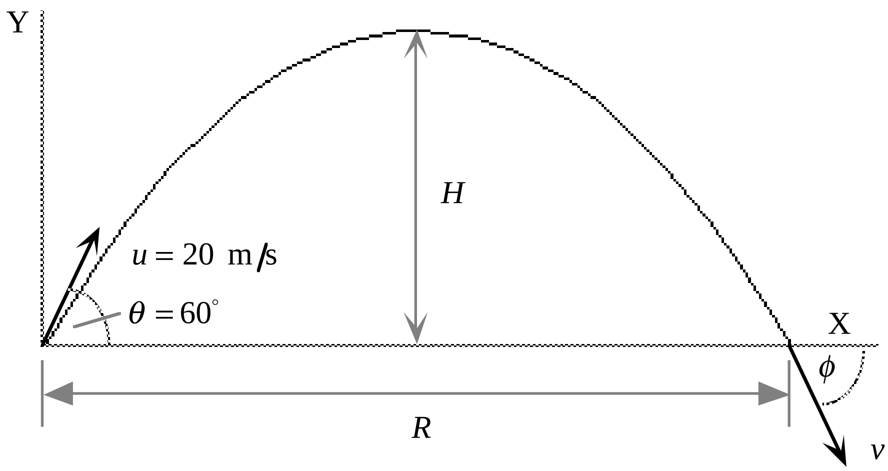
ลูกบอลลูกหนึ่งถูกยิงออกไปในอากาศจากพื้นระดับด้วยความเร็วขนาด $20\ \mathrm{m/s}$ ทำมุม 60 องศา กับแนวระดับ

1. จงหาขนาดของความเร็วต้นในแนวดิ่งและแนวนอน
2. ลูกบอลลอยอยู่กลางอากาศนานเท่าใด ก่อนตกถึงพื้น
3. ลูกบอลตกห่างจากจุดที่ยิงเท่าไร และขึ้นไปได้สูงสุดเท่าไร
4. ลูกบอลกระทบพื้นด้วยความเร็วขนาดเท่าไร และทำมุมเท่าไรกับแนวระดับ

ให้ใช้ $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$

วิธีคิด

ขั้นตอนที่หนึ่ง เราควรวาดรูปคร่าว ๆ แสดงเหตุการณ์ที่เกิดขึ้น กำหนดสัญลักษณ์ให้กับปริมาณต่าง ๆ ที่คิดว่าเกี่ยวข้องดังรูปข้างล่าง



1. ความเร็วต้นในแนวนอนมีค่า $u_x = u\cos\theta = 20\cos 60^\circ \text{ m/s} = 20\times\frac{1}{2}\text{m/s} = 10\,\text{m/s}$ และความเร็วต้นในแนวดิ่งมีค่า $u_y = u\sin\theta = 20\sin 60^\circ \text{ m/s} = 20\times\frac{\sqrt{3}}{2}\text{m/s} = 10\sqrt{3}\,\text{m/s}$

2. เวลาที่ลูกบอลอยู่กลางอากาศมีค่าเท่ากับเวลาที่ลูกบอลเคลื่อนที่ขึ้นในแนวดิ่งด้วยความเร็วในแนวดิ่ง $u_y = 10\sqrt{3}\,\text{m/s}$ ถึงจุดสูงสุดที่ความเร็วเป็นศูนย์ แล้วตกกลับลงมาที่เดิม

จากความรู้ในเรื่องการเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง เรารู้ทันทีว่าเวลาที่ใช้ขึ้น-ลงเป็น 2 เท่าของเวลาขาขึ้น เวลาขาขึ้น Δt คือเวลาที่ทำให้ความเร็วในแนวดิ่งเดิม $u_y = 10\sqrt{3}\,\text{m/s}$ มีค่าลดลงเป็นศูนย์ด้วยอัตรา 10 หน่วย (m/s) ต่อวินาที นั่นคือ $\Delta t = \frac{10\sqrt{3}\,\text{m/s}}{10\,\text{m/s}^2} = \sqrt{3}\text{ s}$ ดังนั้นลูกบอลลอยอยู่กลางอากาศนาน $2\Delta t = 2\sqrt{3}\text{ s}$

3. ระยะทางจากจุดที่ยิงออกไปถึงจุดที่ตกคือระยะการกระจัด R ตามแนวนอนที่เคลื่อนที่ได้ในเวลา $2\sqrt{3}\text{ s}$ ด้วยความเร็วตามแนวนอน $u_x = 10\,\text{m/s}$ คงตัว

ดังนั้น ลูกบอลตกห่างจากจุดที่ยิงเท่ากับ $R = u_x 2\Delta t = 10\times 2\sqrt{3}\text{ m} = 20\sqrt{3}\text{ m}$

ความสูง H ที่ลูกบอลขึ้นไปได้สูงสุดคือระยะการกระจัดสูงสุดตามแนวดิ่งจากตำแหน่งที่ยิงไปยังจุดที่ความเร็วตามแนวดิ่งเป็นศูนย์ ซึ่งมีค่าเท่ากับความเร็วเฉลี่ยคูณกับเวลาที่ใช้ขึ้นไปถึงจุดสูงสุด

$$H = \bar{v}_y\Delta t = \frac{(u_y + 0)}{2}\Delta t = \frac{10\sqrt{3}}{2}\times\sqrt{3}\text{ m} = 15\text{ m}$$

4. จากความรู้เรื่องการเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง ความเร็วในแนวดิ่งที่ระดับสูงเท่ากันมีขนาดเท่ากัน แต่มีทิศตรงกันข้าม และเนื่องจากความเร็วตามแนวนอนมีค่าคงตัว ความเร็วตอนตกกระทบพื้นจึงมีขนาดเท่ากับความเร็วตอนที่ถูกยิงออกไป คือเท่ากับ 20 m/s และมีทิศทำมุมก้ม 60 องศา กับแนวระดับ

นอกจากนั้น จากข้อสังเกตข้างบน เราสรุปได้ว่า ที่ระดับความสูงเท่ากัน ความเร็วตอนขาขึ้นและตอนขาลงจะมีขนาดเท่ากัน ทำมุมกับแนวระดับเท่ากัน แต่ว่าตอนขาขึ้นเป็นมุมเงย ขณะที่ขาลงเป็นมุมก้ม ทำให้การเคลื่อนที่ขาขึ้นและขาลงสมมาตรกัน (ดูรูปการเคลื่อนที่)

ตัวอย่าง

เครื่องบินลำหนึ่งกำลังบินอยู่ในแนวระดับด้วยความเร็วคงตัวขนาด 120 m/s ที่ความสูง 1500 m ขณะที่ปล่อยถุงอาหารให้หลุดออกมาจากเครื่องบิน จงหา

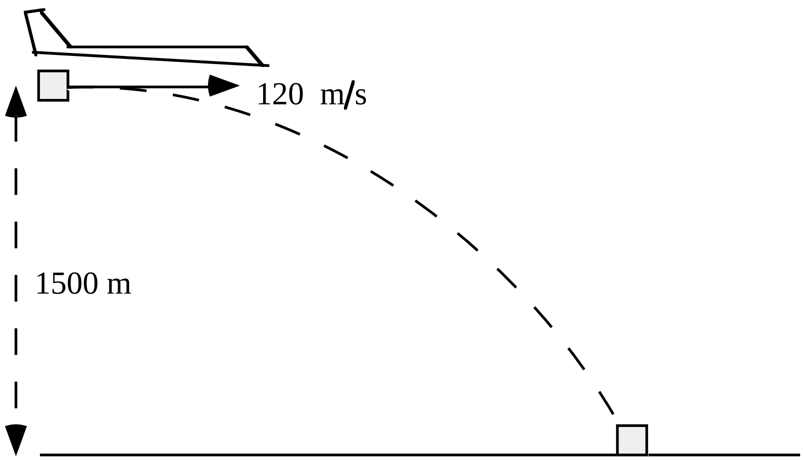
1. เวลาที่ใช้ตั้งแต่ปล่อยจนกระทั่งถุงอาหารกระทบพื้น
2. ระยะทางตามแนวนอนจากตำแหน่งที่ปล่อยถึงตำแหน่งที่ถุงกระทบพื้น

ให้ใช้ $g = 10 \text{ m/s}^2$

วิธีคิด

ก่อนที่เราจะลงมือคำนวณ เราควรรู้คร่าว ๆ ว่าถุงอาหารมีลักษณะการเคลื่อนที่อย่างไร ถุงอาหารเคลื่อนที่มาพร้อมกับเครื่องบิน ดังนั้นจึงมีความเร็วเท่ากับเครื่องบินมาตลอด ทันทีหลังจากปล่อยถุงอาหารจึงต้องมีความเร็วเท่ากับเครื่องบินด้วย คือเท่ากับ 120 m/s ในแนวระดับ และมีความเร็วในแนวดิ่งเท่ากับศูนย์ ถุงอาหารมีความเร็วในแนวนอนคงที่เพราะความเร่งในแนวนอนเป็นศูนย์ แต่ตกลงมาในแนวดิ่งด้วยอัตราเร็วที่มีขนาดเพิ่มขึ้นอย่างสม่ำเสมอ คือทุก ๆ วินาทีจะมีอัตราเร็วเพิ่มขึ้น 10 m/s (ความเร่งมีขนาด $g = 10 \text{ m/s}^2$)

ขั้นต่อมาเราควรเขียนรูปแสดงวิถีการเคลื่อนที่ของถุงอาหาร เนื่องจากความเร็วตามแนวดิ่งมีขนาดเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ในแต่ละวินาทีวัตถุจะตกลงมาเป็นระยะทางที่มากขึ้น และเนื่องจากความเร็วตามแนวนอนคงตัว ในแต่ละระยะทาง 1 เมตรตามแนวนอน วัตถุจะตกลงมาเป็นระยะทางในแนวดิ่งที่มากขึ้น ๆ นั่นคือเส้นทางการเคลื่อนที่จะเป็นเส้นทางที่ชันมากขึ้น ๆ



ขั้นตอนต่อไปในการคำนวณ เราเลือกจุดอ้างอิงและทิศอ้างอิงสองทิศซึ่งตั้งฉากกัน เราเลือกให้ทิศ $\hat{\mathrm{x}}$ เป็นทิศตามแนวนอนไปทางขวา และทิศ $\hat{\mathrm{y}}$ เป็นทิศตามแนวดิ่งลงมา และให้ตำแหน่งที่ปล่อยถุงอาหารเป็นตำแหน่งอ้างอิง

ขั้นตอนที่สำคัญอีกขั้นตอนหนึ่งคือการตั้งชื่อหรือสัญลักษณ์แทนสิ่งที่เราต้องการหา การใช้สัญลักษณ์จะทำให้เราสามารถเขียนเงื่อนไขของสิ่งที่เราต้องการหาในรูปของสมการได้

เหตุการณ์ที่เราสนใจมีสองเหตุการณ์คือ

1. เหตุการณ์ที่ปล่อยถุงอาหาร
2. เหตุการณ์ที่ถุงอาหารกระทบพื้น

ให้ O เป็นตำแหน่งอ้างอิงที่ปล่อยถุงอาหาร และ A เป็นตำแหน่งที่ถุงอาหารกระทบพื้น

ให้เราเริ่มจับเวลาตอนที่ปล่อยถุงอาหารพอดี

ดังนั้น $x_{\mathrm{o}} = 0\ \mathrm{m},\quad y_{\mathrm{o}} = 0\ \mathrm{m}$ และ $y_{\mathrm{A}} = 1500\ \mathrm{m}$

เราต้องการหา x_{A}

ในการเคลื่อนที่จาก O ไป A วัตถุมีการกระจัดตามทิศ $\hat{\mathrm{x}}$ ด้วยความเร็วคงที่เท่ากับความเร็วต้น u_x

ดังนั้น
$$\Delta x_{\mathrm{O}\to\mathrm{A}} = u_x \Delta t_{\mathrm{O}\to\mathrm{A}}$$

ในขณะเดียวกันวัตถุมีการกระจัดในทิศ $\hat{\mathrm{y}}$ ด้วยความเร่งคงที่และด้วยความเร็วต้นเท่ากับศูนย์ในช่วงเวลาเดียวกัน

ดังนั้น
$$\Delta y_{\mathrm{O}\to\mathrm{A}} = u_y \Delta t_{\mathrm{O}\to\mathrm{A}} + \tfrac{1}{2} a_y (\Delta t_{\mathrm{O}\to\mathrm{A}})^2 = 0 + \tfrac{1}{2}(+g)(\Delta t_{\mathrm{O}\to\mathrm{A}})^2$$

แทนค่า $\Delta y_{\mathrm{O}\to\mathrm{A}} = y_{\mathrm{A}} - y_{\mathrm{o}} = 1500 - 0\ \mathrm{m} = 1500\ \mathrm{m}$ และ $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$ เราจะได้ว่า

$$1500\ \mathrm{m} = \tfrac{1}{2} \times 10\,\mathrm{m/s^2}\,(\Delta t_{\mathrm{O}\to\mathrm{A}})^2$$

หรือ
$$\Delta t_{\mathrm{O}\to\mathrm{A}} = \sqrt{300}\ \mathrm{s} = 10\sqrt{3}\ \mathrm{s} = 17.3\ \mathrm{s}$$

นั่นคือ เวลาที่ใช้ตั้งแต่ปล่อยจนกระทั่งถุงอาหารกระทบพื้นมีค่าเท่ากับ 17.3 s

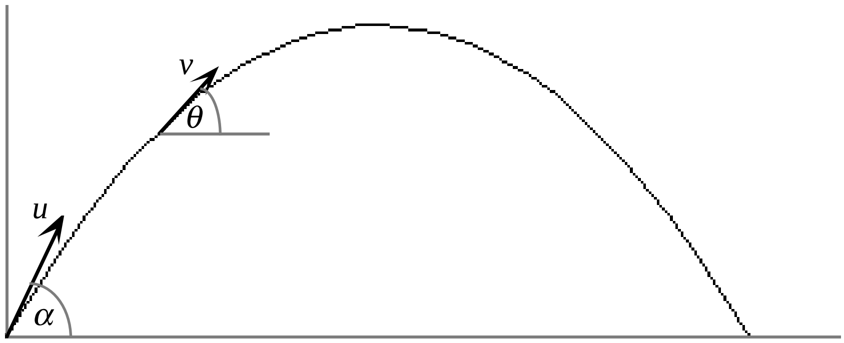
แทนค่าช่วงเวลานี้ลงใน $\Delta x_{\mathrm{O}\to\mathrm{A}} = u_x \Delta t_{\mathrm{O}\to\mathrm{A}}$ พร้อมกับแทนค่าความเร็วต้น $u_x = 120\ \mathrm{m/s}$ จะได้ว่า

$$\Delta x_{\mathrm{O}\to\mathrm{A}} = (120\ \mathrm{m/s}) \times 17.3\ \mathrm{s} = 2076\ \mathrm{m}$$

เพราะฉะนั้น ระยะทางตามแนวนอนจากตำแหน่งที่ปล่อยถึงตำแหน่งที่ถุงกระทบพื้นมีค่าเท่ากับ 2076 m

การหาความเร็วและทิศทางการเคลื่อนที่เมื่อเวลาผ่านไประยะเวลาหนึ่ง

ยิงวัตถุขึ้นด้วยอัตราเร็ว u ทำมุม α กับแนวระดับไปทางขวามือ เราต้องการหาความเร็วและทิศทางการเคลื่อนที่เมื่อเวลาผ่านไป Δt



ให้ทิศไปทางขวามือและทิศขึ้นเป็นทิศอ้างอิง เนื่องจากเรารู้องค์ประกอบของความเร่งในแนวดิ่งและแนวนอน (ขนาด g ทิศลง และศูนย์ตามลำดับ) เราจะหาความเร็วจากองค์ประกอบในแนวดิ่งและแนวนอน ความเร็วต้นในแนวนอนและแนวดิ่งคือ $u\cos\alpha$ และ $u\sin\alpha$ ตามลำดับ ให้ v_x และ v_y เป็นองค์ประกอบความเร็วในทิศขวามือและทิศขึ้นตามลำดับเมื่อเวลาผ่านไป Δt พอดี

จาก $\quad v_x = u_x + a_x\Delta t$ และ $v_y = u_y + a_y\Delta t$

เราได้ว่า $v_x = u\cos\alpha$ เพราะว่าความเร่งตามแนวนอนเป็นศูนย์ ความเร็วในแนวนอนจึงมีค่าคงตัวและเท่ากับตอนตั้งต้น และความเร็วในทิศขึ้นมีค่า $v_y = u\sin\alpha - g\Delta t$ เพราะว่าองค์ประกอบของความเร่งในทิศขึ้นคือ $-g$

ดังนั้น ถ้าให้ v เป็นอัตราเร็ว และ θ เป็นมุมที่ความเร็วทำกับแนวนอนเมื่อเวลาผ่านไป Δt เราจะได้ว่า

$$v^2 = v_x^2 + v_y^2 = u^2\cos^2\alpha + (u\sin\alpha - g\Delta t)^2 = u^2 - 2gu\sin\alpha\Delta t + g^2(\Delta t)^2$$

และ
$$\tan\theta = \frac{u\sin\alpha - g\Delta t}{u\cos\alpha}$$

การหาความเร็วและทิศทางการเคลื่อนที่ ณ ตำแหน่งใด ๆ

ยิงวัตถุขึ้นด้วยอัตราเร็ว u ทำมุม α กับแนวระดับไปทางขวามือ เราต้องการหาความเร็วและทิศทางการเคลื่อนที่เมื่อวัตถุอยู่ที่ระดับสูง h จากระดับที่ยิง

ให้ v เป็นอัตราเร็ว และ θ เป็นมุมที่ความเร็วทำกับแนวนอนเมื่อวัตถุอยู่ที่ความสูง h ดังนั้น องค์ประกอบความเร็วในแนวนอนและแนวดิ่งที่จุดนี้คือ $v\cos\theta$ และ $v\sin\theta$ ตามลำดับ ดังนั้น

$$v_x = v\cos\theta = u\cos\alpha$$

เพราะว่าความเร็วตามแนวนอนคงตัว

จาก $v_y^2 = u_y^2 + 2a_y\Delta y$ (เราใช้สูตรนี้เพราะเราไม่สนใจเกี่ยวกับเวลา เราสนใจความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับการกระจัด) เราได้ว่า

$$v_y = v\sin\theta = \sqrt{u^2\sin^2\alpha - 2gh}$$

เพราะฉะนั้น

$$v^2 = v^2\cos^2\theta + v^2\sin^2\theta = u^2\cos^2\alpha + u^2\sin^2\alpha - 2gh = u^2 - 2gh$$

นอกจากนั้น

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\sqrt{u^2\sin^2\alpha - 2gh}}{u\cos\alpha}$$

ที่จริงแล้วเราสามารถหาขนาดของอัตราเร็วได้จากหลักการคงตัวของพลังงานได้โดยตรง คือ

$$\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \frac{1}{2}mu^2 \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{u^2 - 2gh}$$

การหาความสูงที่ขึ้นไปได้สูงสุดและเวลาที่ใช้

ที่ตำแหน่งสูงสุดความเร็วตามแนวดิ่งเป็นศูนย์ (แต่ความเร็วของวัตถุไม่จำเป็นต้องเป็นศูนย์ เพราะยังมีความเร็วตามแนวนอน $v_x = u\cos\alpha$) วัตถุมีความเร็วในแนวดิ่งลดลงจาก $u\sin\alpha$ เป็นศูนย์ที่จุดสูงสุดด้วยอัตรา g ดังนั้น

เวลาที่ใช้ตั้งแต่ยิงขึ้นไปจนถึงตำแหน่งสูงสุดคือ $\dfrac{u\sin\alpha}{g}$

จาก การกระจัดเท่ากับความเร็วเฉลี่ยคูณเวลาที่ใช้ และ ความเร็วเฉลี่ยมีค่าเท่ากับความเร็วต้นบวกความเร็วปลายหารด้วยสอง เราได้ว่า

ในช่วงเวลานี้วัตถุมีการกระจัดตามแนวดิ่งเท่ากับ $\dfrac{1}{2}(u\sin\alpha + 0)\times\dfrac{u\sin\alpha}{g} = \dfrac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

เพราะฉะนั้น การกระจัดสูงสุดในแนวดิ่งจากจุดที่ยิงขึ้นไปมีค่าเท่ากับ $\dfrac{u^2\sin^2\alpha}{2g}$

การหาระยะตามแนวนอนและเวลาที่ใช้

เมื่อวัตถุตกกลับลงมาที่ความสูงเดิมตอนตั้งต้น การกระจัดตามแนวดิ่งมีค่าเป็นศูนย์ ดังนั้น ถ้า Δt เป็นเวลาทั้งหมดที่วัตถุเคลื่อนที่ตั้งแต่เริ่มต้นจนกลับมาที่ความสูงเดิม เราจะได้จาก $\Delta y = u_y\Delta t + \frac{1}{2}a_y(\Delta t)^2$ ว่า

$$0 = u\sin\alpha\Delta t + \tfrac{1}{2}(-g)(\Delta t)^2$$

หรือ $\Delta t = \dfrac{2u\sin\alpha}{g}$ (เราไม่เลือกคำตอบ $\Delta t = 0$ เพราะว่าเวลาที่ใช้จริง ๆ ต้องมากกว่าศูนย์)

สังเกตว่า <u>เวลาที่เคลื่อนที่ขึ้นไปแล้วกลับมาที่ความสูงเดิมเป็นสองเท่าของเวลาที่วัตถุขึ้นไปถึงจุดสูงสุด</u> ดังนั้น เวลาขาลงจากจุดสูงสุดกลับมาที่พื้นนานเท่ากับเวลาขาขึ้นจากพื้นขึ้นไปถึงจุดสูงสุด

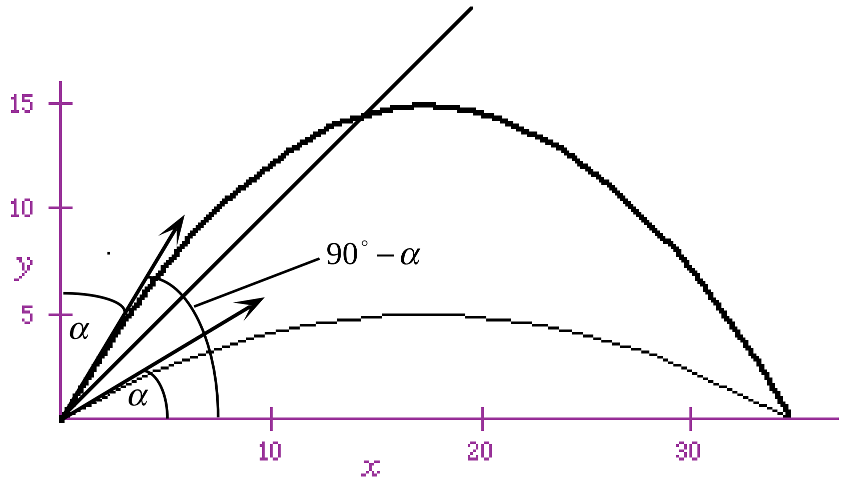
ในระหว่างเวลา $\Delta t = \dfrac{2u\sin\alpha}{g}$ นี้ วัตถุเคลื่อนที่ด้วยความเร็วตามแนวนอนคงที่ $u\cos\alpha$ ดังนั้น

ระยะตามแนวนอนที่เคลื่อนที่ไปได้เท่ากับ $u\cos\alpha\times\Delta t = \dfrac{2u^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = \dfrac{u^2\sin 2\alpha}{g}$

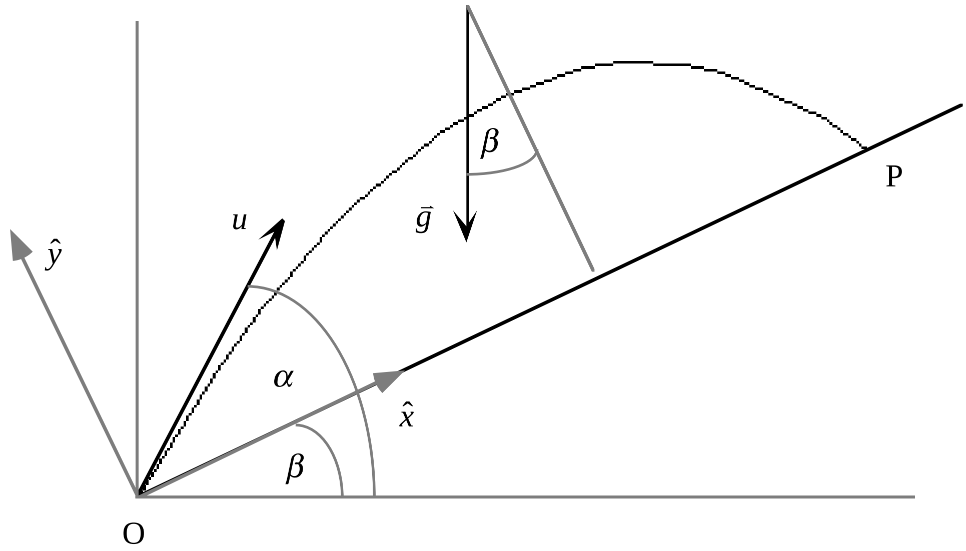
สำหรับอัตราเร็วต้น u ขนาดหนึ่ง ระยะตามแนวนอนไกลสุดที่ไปได้เกิดขึ้นเมื่อมุมของการยิงทำให้ $\sin 2\alpha$ มีค่าสูงสุดเท่ากับหนึ่ง ซึ่งเกิดขึ้นเมื่อ $2\alpha = 90^\circ$ หรือ $\alpha = 45^\circ$

ดังนั้นระยะตามแนวนอนมีค่าสูงสุดเมื่อวัตถุถูกยิงขึ้นด้วยความเร็วต้นทำมุม 45° กับแนวนอน และระยะไกลสุดนี้มีขนาดเท่ากับ $\dfrac{u^2}{g}$

ข้อสังเกต: เนื่องจาก $\sin(90^\circ - \alpha)\cos(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha \sin\alpha = \sin\alpha \cos\alpha$ วัตถุที่ถูกยิงขึ้นไปในทิศทำมุม $90^\circ - \alpha$ กับแนวนอนจะไปได้ไกลในแนวนอนเท่ากับวัตถุที่ถูกยิงขึ้นไปด้วยอัตราเร็วเท่ากันแต่ในทิศทำมุม α กับแนวนอน ในรูปข้างล่าง จะเห็นได้ว่าทิศทั้งสองนี้เอียงทำมุมกับแนวดิ่งและแนวนอนเท่ากัน (และดังนั้นเอียงทำมุมกับเส้น 45° เท่ากันด้วย)



การหาระยะตามพื้นเอียง



จากจุด ๆ หนึ่งบนระนาบเอียงซึ่งทำมุม β กับแนวนอน วัตถุหนึ่งถูกยิงขึ้นไปด้วยความเร็วขนาด u ทำมุม α กับแนวระดับในระนาบซึ่งผ่านเส้นแนวฉากกับระนาบเอียงและเส้นตรงที่ชันที่สุดของระนาบเอียงดังรูป เราต้องการหาระยะบนระนาบเอียงที่วัตถุนี้เคลื่อนที่ขึ้นไปได้ (ระยะ OP ในรูป)

ก่อนอื่นเราต้องทำความเข้าใจเกี่ยวกับตำแหน่ง P ที่ซึ่งวัตถุตกกลับลงมาบนพื้นเอียงว่าเป็นตำแหน่งใด เราอาจมองว่า P เป็นจุดที่เส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุตัดกับเส้นตรงที่แทนพื้นเอียง แต่วิธีการมองอีกวิธีหนึ่งที่สะดวกกว่าคือมองว่า P เป็นจุดที่ซึ่งการกระจัดของอนุภาคใน*แนวตั้งฉากกับพื้นเอียง* มีค่าเป็นศูนย์ นอกจากนั้นเรายังสนใจการกระจัดตามพื้นเอียงด้วย ดังนั้นเราจะพิจารณาการเคลื่อนที่ของวัตถุนี้ในทิศตั้งฉากและขนานกับพื้นเอียง ดังในรูป

องค์ประกอบของความเร็วต้นในทิศ $\hat{x}$ และ $\hat{y}$ คือ $u\cos(\alpha-\beta)$ และ $u\sin(\alpha-\beta)$ ตามลำดับ และองค์ประกอบของความเร่งในทิศ $\hat{x}$ และ $\hat{y}$ คือ $-g\sin\beta$ และ $-g\cos\beta$ ตามลำดับ

ให้ Δt เป็นเวลาซึ่งวัตถุใช้เดินทางจาก O ไป P ในเวลาเดียวกันนี้วัตถุมีการกระจัดในแนวตั้งฉากกับพื้นเอียงเป็นศูนย์ จาก $\Delta y = u_y\Delta t + \frac{1}{2}a_y(\Delta t)^2$ เราได้ว่า

$$0 = u\sin(\alpha-\beta)\Delta t + \tfrac{1}{2}(-g\cos\beta)(\Delta t)^2$$

หรือ
$$\Delta t = \frac{2u\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}$$

ในช่วงเวลาเดียวกันนี้วัตถุมีการกระจัดไปตามพื้นเอียงยาว OP จาก $\Delta x = u_x \Delta t + \frac{1}{2} a_x (\Delta t)^2$ แทนค่าความเร็วต้น ความเร่ง และช่วงเวลา Δt เราได้ว่า

$$\begin{aligned}\Delta x &= u\cos(\alpha-\beta)\frac{2u\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta} + \tfrac{1}{2}(-g\sin\beta)\left[\frac{2u\sin(\alpha-\beta)}{g\cos\beta}\right]^2 \\ &= \frac{2u^2\sin(\alpha-\beta)}{g\cos^2\beta}\left[\cos(\alpha-\beta)\cos\beta - \sin(\alpha-\beta)\sin\beta\right] \\ &= \frac{2u^2\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha}{g\cos^2\beta}\end{aligned}$$

ระยะไกลสุดตามพื้นเอียง

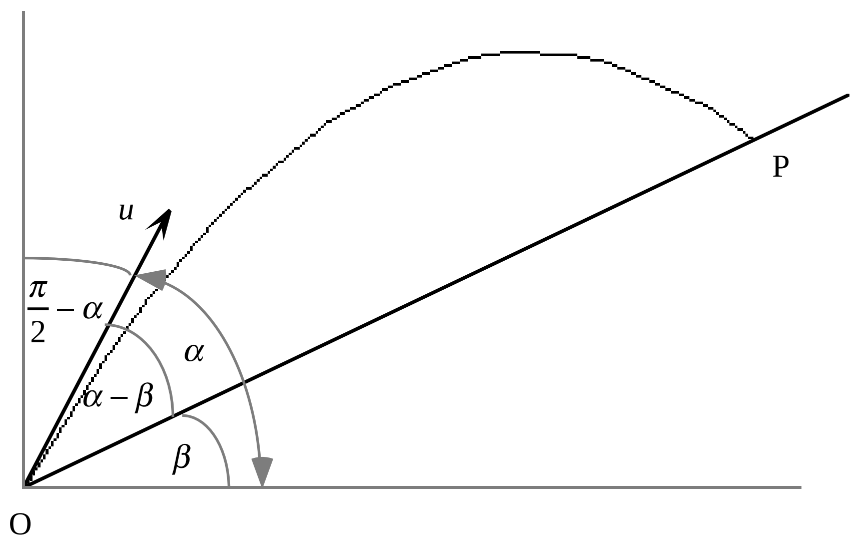
โดยการใช้เอกลักษณ์ตรีโกณมิติ $2\sin A\cos B = \sin(A+B) + \sin(A-B)$ และ $\sin(-\beta) = -\sin\beta$ เราสามารถเขียนระยะทางตามพื้นเอียงในหัวข้อได้ว่า

$$\frac{2u^2\sin(\alpha-\beta)\cos\alpha}{g\cos^2\beta} = \frac{u^2}{g\cos^2\beta}\left[\sin(2\alpha-\beta) - \sin\beta\right]$$

เนื่องจากอัตราเร็วต้น u และมุม β เป็นสิ่งที่ถูกกำหนดมา ดังนั้นระยะตามพื้นเอียงมีค่าสูงสุดเมื่อ $\sin(2\alpha-\beta)$ มีค่ามากสุด คือเมื่อ $2\alpha-\beta = \frac{\pi}{2}$ หรือ $\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\beta}{2}$

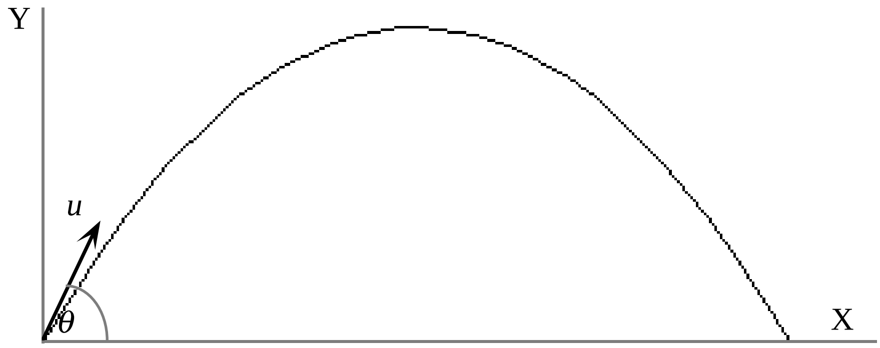
และ ระยะไกลสุดตามพื้นเอียงมีค่าเท่ากับ $\frac{u^2}{g\cos^2\beta}\left[1-\sin\beta\right] = \frac{u^2}{g\left[1+\sin\beta\right]}$

สังเกตว่าในกรณีนี้มุมที่ความเร็วต้นทำกับแนวดิ่งซึ่งคือ $\frac{\pi}{2}-\alpha$ มีค่าเท่ากับ $\alpha-\beta$ ซึ่งเป็นมุมระหว่างความเร็วต้นกับพื้นเอียง ดังนั้นทิศความเร็วต้นที่ให้ระยะตามพื้นเอียงไกลสุดคือทิศที่แบ่งครึ่งมุมระหว่างแนวดิ่งกับพื้นเอียง



เส้นทางการเคลื่อนที่ของโพรเจกไทล์

เราหาสมการที่บอกเส้นทางการเคลื่อนที่ของโพรเจกไทล์ภายใต้แรงโน้มถ่วงอย่างเดียว โดยการกำจัดตัวแปรเวลาระหว่างสมการที่ให้ตำแหน่งตามแกนนอนและแกนดิ่ง



ให้จุดกำเนิดเป็นตำแหน่งบนพื้นที่ยิงโพรเจกไทล์ออกไป และเริ่มจับเวลาเมื่อยิงโพรเจกไทล์ เราจะได้ว่า

$$x = u\cos\theta \times t \quad \text{และ} \quad y = u\sin\theta \times t - \tfrac{1}{2}gt^2$$

แทนค่า $t = x/u\cos\theta$ จากสมการในแนวนอน ลงในสมการในแนวดิ่ง จะให้

$$y = \frac{u\sin\theta}{u\cos\theta}\times x - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{u^2\cos^2\theta} \quad \text{หรือ} \quad y = \tan\theta\times x - \frac{1}{2u^2}g\sec^2\theta\times x^2$$

สมการนี้เป็นสมการพาราโบลาคว่ำดังรูปข้างบน

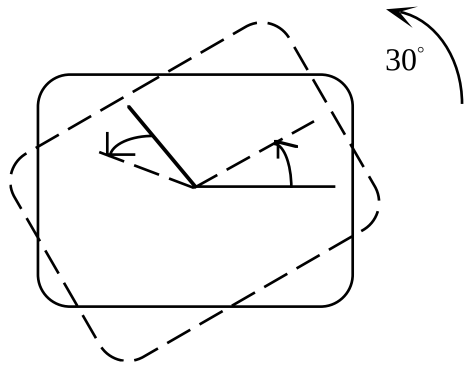
การเคลื่อนที่เชิงมุม

บทนำ

วัตถุหลายชนิดมีการเคลื่อนที่แบบหมุน เช่น ใบพัดของพัดลม ล้อรถยนต์ เครื่องยนต์ส่วนใหญ่มีส่วนประกอบที่หมุน แต่ลักษณะสำคัญของวัตถุที่หมุนก็คือเป็นระบบที่ประกอบด้วยหลายอนุภาค เราอาจบรรยายการเคลื่อนที่ของวัตถุโดยบอกการเคลื่อนที่ของอนุภาคต่าง ๆ ของระบบได้ด้วยกฎการเคลื่อนที่ซึ่งเราได้เรียนมาแล้ว แต่สำหรับระบบที่ประกอบด้วยอนุภาคจำนวนมหาศาล วิธีการดังกล่าวเป็นวิธีการที่ไม่สะดวกแม้ว่าโดยทางทฤษฎีจะทำได้ สำหรับวัตถุแข็งเกร็งที่มีรูปทรงที่แน่นอน การบรรยายการเคลื่อนที่ด้วยมุมเป็นวิธีที่สะดวกกว่ามาก

การบรรยายการเคลื่อนที่แบบหมุนโดยใช้มุม

พิจารณาวงล้อหรือวัตถุอื่นใดก็ได้ซึ่งหมุนไปเป็นมุม 30° รอบแกน ๆ หนึ่งดังรูปข้างล่าง



เราสามารถบอกการเคลื่อนที่ของวัตถุได้ง่าย ๆ โดยการบอกมุมที่หมุนไปเพียงค่าเดียว แต่ถ้าเราใช้การเคลื่อนที่เชิงเส้นของแต่ละอนุภาค เราต้องบอกทั้งทิศและขนาดของการกระจัดของแต่ละอนุภาคเพราะแต่ละอนุภาคจะมีการกระจัดต่างๆ กัน

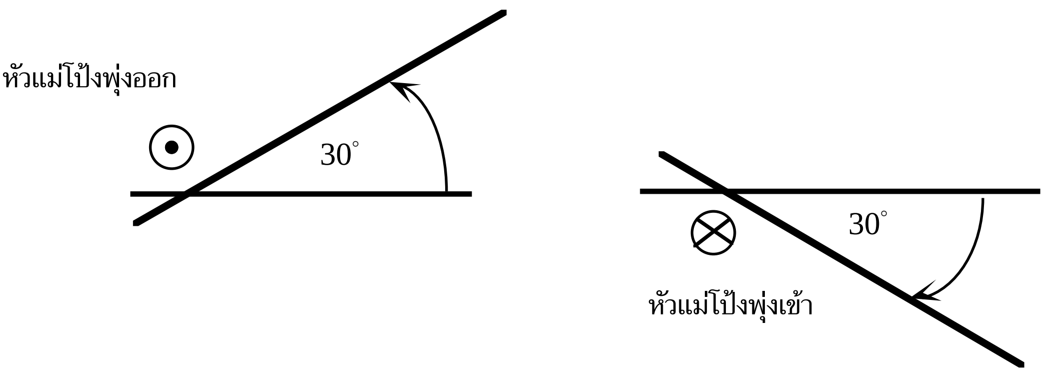
ดังนั้นเราต้องรู้วิธีการบรรยายการเคลื่อนที่ด้วยมุมและเขียนกฎการเคลื่อนที่ต่างๆ ในรูปของมุม

การกระจัดเชิงมุมและตำแหน่ง

เราบอกการหมุนด้วยการกระจัดเชิงมุม ในการบอกการกระจัดเชิงมุม เราจะต้องบอก 1. แกนหมุน 2. มุมที่หมุนไป 3. ทิศการหมุน

*แกนหมุน*คือแนวเส้นตรงที่วัตถุหมุนรอบ เมื่อวัตถุหมุน อนุภาคที่อยู่บนแกนหมุนจะไม่เคลื่อนที่

เราจำเป็นต้องบอก*ทิศ*การหมุนว่าวัตถุหมุนทวนเข็มนาฬิกาหรือทวนเข็มนาฬิกา เพราะถ้าเราบอกแต่ขนาดของมุมที่หมุนไปอย่างเดียวจะไม่พอที่จะรู้ว่าวัตถุหมุนไปทางไหน ในรูปข้างล่าง รูปซ้ายมือเป็นการหมุนทวนเข็มนาฬิกา 30° ส่วนรูปขวามือเป็นการหมุนตามเข็มนาฬิกาไปเป็นมุม 30° เท่ากัน

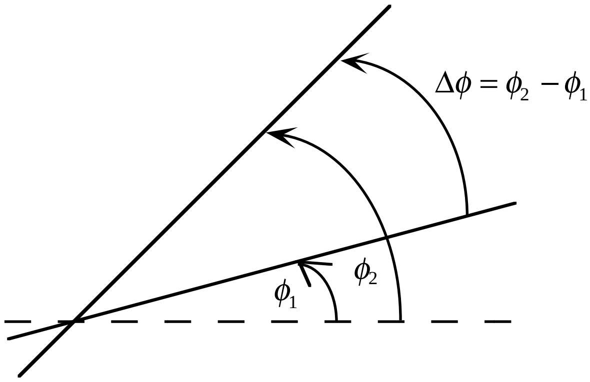


เราอาจเลือกให้ทิศทวนเข็มนาฬิกาเป็นทิศบวกและทิศตามเข็มนาฬิกาเป็นทิศลบเหมือนกับที่เราให้ทิศขวามือเป็นทิศบวกและทิศซ้ายมือเป็นทิศลบในการเคลื่อนที่เชิงเส้น

วิธีการบอกการหมุนวิธีอื่นที่ใช้ได้กับการหมุนในกรณีสามมิติทั่วไปคือการใช้*กฎมือขวา* ถ้าเรากำมือขวาให้นิ้วมือสี่นิ้วบนไปตามทิศที่วัตถุหมุน เราให้ทิศของการกระจัดเชิงมุมเป็นทิศที่นิ้วหัวแม่โป้งขวาชี้ ดังนั้นในหน้าที่แล้ว รูปบนซ้ายมือ การกระจัดเชิงมุมมีทิศพุ่งออก และในรูปขวามือการกระจัดเชิงมุมมีทิศพุ่งเข้า

การบอกตำแหน่งเชิงมุม

เราบอกตำแหน่งเชิงมุมของวัตถุโดยการบอกการกระจัดเชิงมุมเทียบกับแนวอ้างอิงหนึ่งที่เรากำหนด ดังรูปข้างล่าง

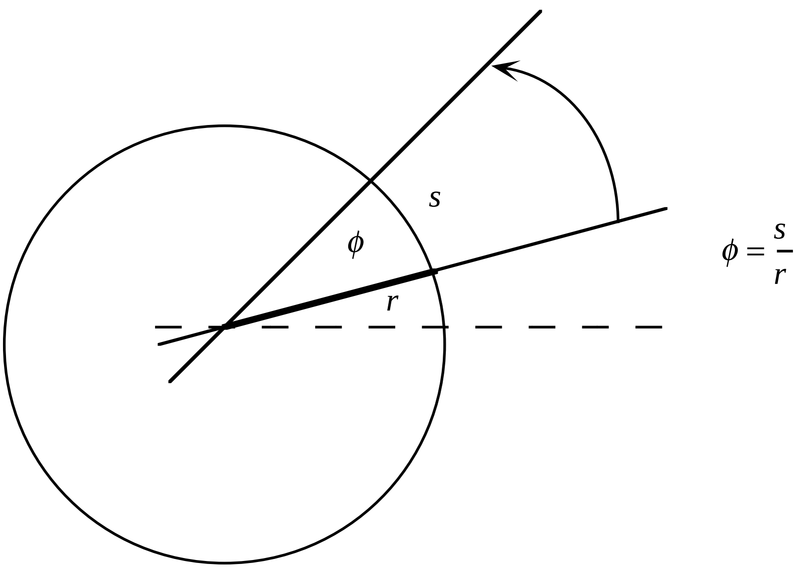


ในรูปข้างบนเดิมวัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง ϕ_1 แล้วต่อมาหมุนไปอยู่ที่ตำแหน่ง ϕ_2 การกระจัดเชิงมุมมีค่าเท่ากับ $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$

หน่วยของมุม

เราวัดมุมได้หลายหน่วย เช่น 1 รอบ มีค่าเท่ากับมุมที่วัตถุหมุนไปได้ครบรอบพอดีกลับมที่ตำแหน่งเดิมเป็นครั้งแรก หน่วยที่สามัญกว่าคือองศา (ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย $^\circ$)โดยที่ 360 องศา = 1 รอบ

เราอาจวัดมุมโดยดูจากระยะทางบนส่วนโค้งของเส้นรอบวงดังรูปข้างล่าง โดยที่ $\phi = \dfrac{s}{r}$ มุมที่วัดโดยวิธีนี้มีหน่วยเป็นเรเดียน ซึ่งจริง ๆ แล้วอาจถือว่าเป็นตัวเลขบริสุทธิ์เพราะได้มาจากอัตราส่วนระหว่างความยาวสองปริมาณ เมื่อหมุนไปครบหนึ่งรอบ ความยาวตามเส้นรอบวงที่เปลี่ยนไปคือ $2\pi r$ ดังนั้น 1 รอบ = 360 องศา = $\dfrac{2\pi r}{r} = 2\pi$ เรเดียน



ความเร็วเชิงมุม

อัตราการเปลี่ยนแปลงมุมต่อเวลาหรือการกระจัดเชิงมุมต่อเวลา เรียกว่า*ความเร็วเชิงมุม* ใช้สัญลักษณ์แทนด้วย ω เราให้นิยามความเร็วเชิงมุมเฉลี่ยในช่วงเวลา Δt ดังนี้

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

ความเร็วเชิงมุมขณะหนึ่งมีค่าเท่ากับความเร็วเชิงมุมเฉลี่ยในช่วงเวลาสั้น ๆ ที่ขณะนั้น

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}, \quad \Delta \mathrm{t} \to 0$$

ความเร็วเชิงมุมมีหน่วยเป็น เรเดียนต่อวินาที หรือ 1/วินาที ซึ่งบางทีย่อว่า s^{-1}

ความเร่งเชิงมุม

ความเร่งเชิงมุมเป็นปริมาณที่วัดว่าความเร็วเชิงมุมเปลี่ยนไปเร็วแค่ไหนในหนึ่งหน่วยเวลา เรามักใช้สัญลักษณ์ α แทน เราให้นิยามความเร่งเชิงมุมเฉลี่ยในช่วงเวลา Δt ดังนี้

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

ความเร่งเชิงมุมขณะหนึ่งมีค่าเท่ากับความเร่งเชิงมุมเฉลี่ยในช่วงเวลาสั้น ๆ ที่ขณะนั้น

$$\omega = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}, \quad \Delta \mathrm{t} \to 0$$

ความเร่งเชิงมุมมีหน่วยเป็น เรเดียนต่อวินาที^{2} หรือ 1/วินาที^{2} ซึ่งบางทีย่อว่า s^{-2}

ความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัดเชิงมุมและอัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาณเชิงมุมต่าง ๆ

สำหรับการหมุนในระนาบที่แน่นอน ปริมาณเชิงมุมต่าง ๆ มีความสัมพันธ์กันเหมือนกับกรณีเชิงเส้น คือ

ถ้าความเร่งเชิงมุมมีค่าคงตัว เราจะได้ว่า

$$\omega = \omega_0 + \alpha \Delta t$$

$\Delta\phi = \overline{\omega}\Delta t$ โดยที่ $\overline{\omega}$ คือความเร็วเชิงมุมเฉลี่ย

$\Delta\phi = \omega_0 \Delta t + \frac{1}{2}\alpha \Delta t^2$ โดยที่ ω_0 คือความเร็วเชิงมุมต้น

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\phi$$

การเคลื่อนที่เชิงมุมด้วยความเร่งเชิงมุมคงที่มีสมการการเคลื่อนที่ในรูปแบบที่เหมือนกันกับสมการของการเคลื่อนที่เชิงเส้นด้วยความเร่งคงที่ ในรูปของสัญลักษณ์ที่ใช้กันทั่วไป เรามี

เชิงเส้น	เชิงมุม
$\langle v \rangle = \frac{1}{2}(v_i + v_f)$	$\langle \omega \rangle = \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)$
$\Delta x = \langle v \rangle \Delta t$	$\Delta\phi = \langle \omega \rangle \Delta t$
$v = v_0 + a\Delta t$	$\omega = \omega_0 + \alpha\Delta t$
$v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha\Delta\phi$
$\Delta x = v_0\Delta t + \frac{1}{2}a\Delta t^2$	$\Delta\phi = \omega_0\Delta t + \frac{1}{2}\alpha\Delta t^2$

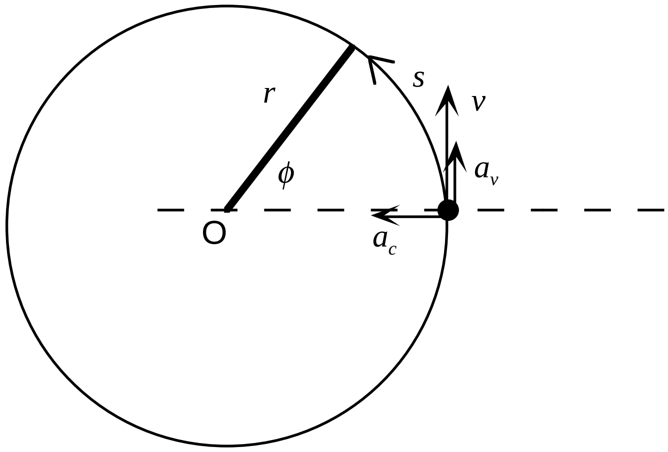
สมการที่สองของสมการข้างบนคือนิยามของความเร็วเฉลี่ย ดังนั้นนิยามนี้ใช้ได้ไม่ว่าความเร่งคงตัวหรือไม่

การเคลื่อนที่เป็นวงกลม

การเคลื่อนที่แบบโพรเจกไทล์เป็นการเคลื่อนที่ซึ่งความเร่งมีค่าคงตัว การเคลื่อนที่เป็นวงกลมหรือเป็นส่วนของวงกลม เช่น การโคจรของดาวเทียม หรือขณะที่รถเลี้ยวโค้ง เป็นการเคลื่อนที่แบบโค้งที่ความเร่งไม่คงตัว

ความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่เชิงมุมและการเคลื่อนที่เชิงเส้น

ถ้าวัตถุหมุนรอบแกนที่อยู่กับที่ อนุภาคทุกอนุภาคในวัตถุจะเคลื่อนที่เป็นวงกลมโดยที่มีจุดศูนย์กลางอยู่บนแกน ถ้าอนุภาคอยู่ห่างจากแกนเป็นระยะ r อนุภาคนี้จะเคลื่อนที่เป็นวงกลมรัศมี r ดังในรูปข้างล่าง



เราสามารถหาความสัมพันธ์ระหว่างการเคลื่อนที่เชิงมุมและการเคลื่อนที่เชิงเส้นของอนุภาคนี้ได้ดังนี้

$$\phi = \frac{s}{r} \Rightarrow s = \phi r$$

สำหรับการกระจัดเชิงมุมเท่ากัน อนุภาคที่อยู่ห่างจากแกนจะมีการกระจัดเชิงเส้นมากกว่า

จากสมการข้างบน เราได้ด้วยว่า

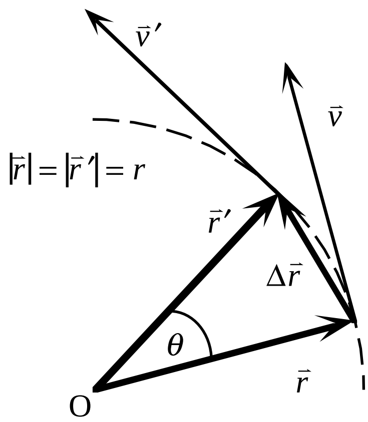
$$\Delta s = r\Delta\phi \Rightarrow \frac{\Delta s}{\Delta t} = r\frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

หรือ $$v = r\omega$$

อนุภาคที่อยู่ห่างจากแกนจะเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเชิงเส้นที่มีขนาดมากกว่าอนุภาคที่อยู่ใกล้แกน

การเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงที่

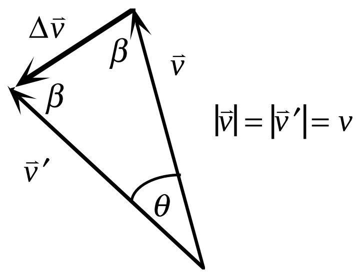
ข้อสังเกตข้อแรกก็คือ เมื่อวัตถุเปลี่ยนทิศการเคลื่อนที่ ความเร็วของวัตถุนั้นย่อมเปลี่ยนด้วย ซึ่งหมายความว่าวัตถุนั้นต้องมีความเร่ง เพราะความเร่งคืออัตราการเปลี่ยนความเร็วต่อเวลา และความเร็วอาจเปลี่ยนได้สองทาง คือ เปลี่ยนขนาด และ/หรือ เปลี่ยนทิศ ในหัวข้อนี้เราพิจารณาการเคลื่อนที่เป็นวงกลมหรือส่วนของวงกลมด้วย*อัตราเร็วคงตัว* ในกรณีนี้ความเร่งของวัตถุเป็นผลเนื่องจากการ*เปลี่ยนทิศ*ของความเร็วอย่างเดียว



อนุภาคเคลื่อนตามส่วนโค้งวงกลมด้วยอัตราเร็วคงตัว $\vec{v}$

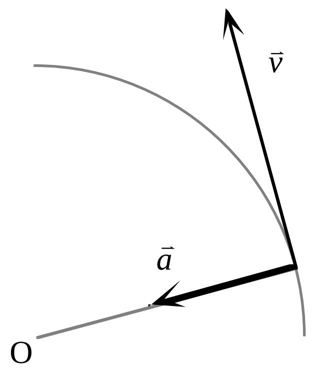
รูปข้างบน แสดงให้เห็นเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r}$ ของอนุภาค (เทียบกับจุดศูนย์กลาง O ของวงกลม) และความเร็ว $\vec{v}$ ของอนุภาคที่เวลา t ขณะหนึ่ง รูปนี้ยังแสดงให้เห็นเวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{r}'$ และความเร็ว $\vec{v}'$ ของอนุภาคที่เวลา t' ต่อมาเล็กน้อย เนื่องจากอนุภาคเคลื่อนที่เป็นส่วนโค้งของวงกลม เวกเตอร์บอกตำแหน่งทั้งสองเวกเตอร์มีขนาดเท่ากันและเท่ากับรัศมี r ของวงกลม นอกจากนั้นความเร็วของอนุภาคที่ทั้งสองเวลาต่างมีทิศในแนวสัมผัสกับส่วนโค้งของวงกลม และมีขนาดเท่ากันเนื่องจากอนุภาคกำลังเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว v คงตัว

เราหาความเร่งจากนิยาม $$\vec{a}(\text{ที่เวลา } T) = \frac{\vec{v}(\text{ที่เวลา } T+\Delta t) - \vec{v}(\text{ที่เวลา } T)}{\Delta t} \text{ เมื่อ } \Delta t \to 0$$



เวกเตอร์ความเร็วที่เปลี่ยนไป

รูปข้างบนแสดงให้เห็นการลบเวกเตอร์ความเร็วที่เวลา t' กับ t เพื่อหาความเร็วที่เปลี่ยนไป $\Delta\vec{v} = \vec{v}' - \vec{v}$ ของอนุภาคในระหว่างช่วงเวลา $\Delta t = t' - t$ สั้น ๆ เนื่องจากความเร็วมีทิศตั้งฉากกับเวกเตอร์ตำแหน่งตลอดเวลา ดังนั้นเวกเตอร์ตำแหน่งเบนไปจากเดิมเท่าไร เวกเตอร์ความเร็วก็เบนไปจากแนวเดิมเป็นมุมเท่ากันด้วย ถ้าเวกเตอร์ $\vec{r}$ ทำมุม θ กับเวกเตอร์ $\vec{r}'$ เวกเตอร์ $\vec{v}$ จะทำมุม θ กับเวกเตอร์ $\vec{v}'$ ด้วย เนื่องจาก $|\vec{v}| = |\vec{v}'| = v$ มุมที่ฐานสามเหลี่ยมด้าน $\Delta\vec{v}$ มีขนาดเท่ากับ $\beta = 90^\circ - \dfrac{\theta}{2}$ เท่ากัน ในช่วงเวลา $\Delta t = t' - t$ ที่สั้นมาก ๆ ความเร็วเปลี่ยนทิศไปน้อยมาก และ θ มีค่าประมาณศูนย์ ดังนั้นมุม β มีค่าประมาณ 90° เพราะฉะนั้นความเร็วที่เปลี่ยนไปในช่วงเวลาสั้น ๆ นี้มีทิศตั้งฉากกับความเร็ว $\vec{v}$ เดิม ความเร่ง $\vec{a}$ มีทิศเดียวกับความเร็วที่เปลี่ยนไป จึงมี*ทิศตั้งฉากกับความเร็ว*ด้วย และมี*ทิศเข้าหาจุดศูนย์กลาง*ของส่วนโค้งของวงกลมดังรูปข้างล่าง



ความเร่งของอนุภาคซึ่งเคลื่อนที่ตามส่วนโค้งวงกลมด้วยอัตราเร็วคงที่

ขนาดของความเร่งในช่วงเวลา Δt นี้คือ $\dfrac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t}$ ดังนั้นจึงหาได้จากขนาดของความเร็วที่เปลี่ยนไปในช่วงเวลานี้ เราสังเกตว่าสามเหลี่ยมเวกเตอร์บอกตำแหน่งในรูปแสดงตำแหน่งเป็นสามเหลี่ยมคล้ายกับสามเหลี่ยม

ความเร็วในรูปแสดงเวกเตอร์ความเร็ว เพราะมีมุมภายในเหมือนกันและเป็นสามเหลี่ยมหน้าจั่วทั้งคู่ ดังนั้น อัตราส่วนด้านตรงข้ามมุม θ หารด้วยด้านประชิดมุมนี้ของสามเหลี่ยมทั้งคู่จึงต้องมีค่าเท่ากัน

นั่นคือ

$$\frac{|\Delta\vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta\vec{r}|}{r}$$

หรือ $$|\Delta\vec{v}| = \frac{v}{r}|\Delta\vec{r}|$$

ขนาดของความเร่งเฉลี่ยในช่วงเวลานี้จึงมีค่า

$$|\vec{a}| = \frac{|\Delta\vec{v}|}{\Delta t} = \frac{v}{r}\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$$

เมื่อช่วงเวลา Δt มีค่าน้อยมากเข้าหาศูนย์ อัตราส่วน $\frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$ มีค่าเข้าหาขนาดความเร็ว v

ดังนั้น ความเร่งมีขนาด $|\vec{a}| = \frac{v}{r}v = \frac{v^2}{r}$

คาบและความถี่

พิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคหนึ่งซึ่งเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงตัว อนุภาคจะเคลื่อนที่วนซ้ำทางเดิมอย่างสม่ำเสมอ การเคลื่อนที่จะเป็นแบบซ้ำตัวเอง เวลาที่อนุภาคใช้ในการเคลื่อนที่ครบหนึ่งรอบพอดีเรียกว่าหนึ่งคาบ จำนวนรอบที่อนุภาคเคลื่อนที่ได้ในหนึ่งหน่วยเวลาเรียกว่าความถี่ เรามักใช้สัญลักษณ์ T และ f แทนคาบและความถี่ตามลำดับ นั่นคือ

คาบ T คือ เวลาครบหนึ่งรอบ

ความถี่ f คือ จำนวนรอบต่อหนึ่งหน่วยเวลา

เนื่องจากอนุภาคใช้เวลา T ในการเคลื่อนที่ครบหนึ่งรอบ เพราะฉะนั้นในเวลาหนึ่งหน่วยอนุภาคจะเคลื่อนที่ได้ $\frac{1}{T}$ รอบ ดังนั้นเราได้ว่า

$$f = \frac{1}{T}$$

ถ้าอนุภาคมีอัตราเร็วมาก อนุภาคจะใช้เวลาน้อยในการเคลื่อนที่ไปตามเส้นรอบวงครบหนึ่งรอบ เพราะฉะนั้นอัตราเร็วและคาบมีความสัมพันธ์กัน ถ้าอัตราเร็วมีค่าคงตัวเท่ากับ v เวลาที่อนุภาคใช้เคลื่อนที่ไปตามเส้นรอบวงของวงกลมรัศมี r เป็นระยะทาง $2\pi r$ ครบหนึ่งรอบมีค่าเท่ากับ $\frac{2\pi r}{v}$ ดังนั้น

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

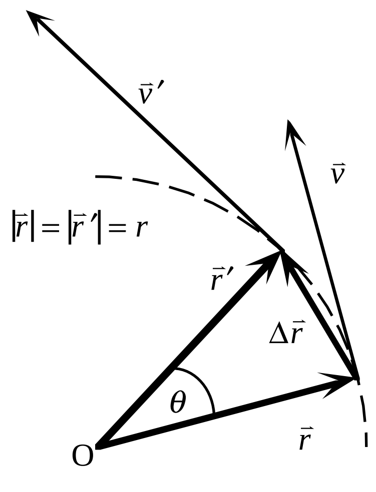
ถ้าเราแทนค่าคาบในสมการบนโดยใช้ $f = \frac{1}{T}$ เราจะได้ความสัมพันธ์ระหว่างอัตราเร็วและความถี่ว่า

$$v = 2\pi r f$$

สมการนี้บอกว่า ระยะทางที่เคลื่อนที่ได้ในหนึ่งวินาที มีค่าเท่ากับ ระยะทางที่เคลื่อนที่ได้ในหนึ่งรอบ คูณกับ จำนวนรอบที่เคลื่อนที่ได้ในหนึ่งวินาที

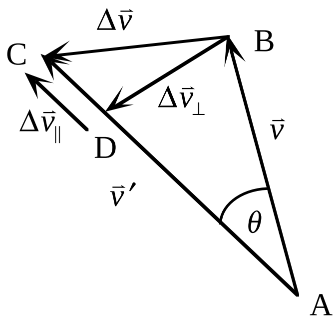
การเคลื่อนที่เป็นวงกลมทั่วไป

ในตอนที่แล้วเราศึกษาการเคลื่อนที่ตามส่วนโค้งวงกลมด้วยอัตราเร็วคงตัว แต่โดยทั่วไปการเคลื่อนที่เป็นส่วนโค้งของวงกลมไม่จำเป็นต้องมีอัตราเร็วคงตัว ตัวอย่างเช่น การเคลื่อนที่ของลูกตุ้มที่ห้อยจากเชือกในระนาบดิ่ง มีอัตราเร็วที่จุดสูงสุดเป็นศูนย์ แต่มีขนาดมากที่สุดที่จุดต่ำสุด



รูปข้างบนแสดงให้เห็นเวกเตอร์บอกตำแหน่ง $\vec{r}$ ของอนุภาค (เทียบกับจุดศูนย์กลาง O ของวงกลม) และความเร็ว $\vec{v}$ ของอนุภาคที่เวลา t ขณะหนึ่ง รูปนี้ยังแสดงให้เห็นเวกเตอร์ตำแหน่ง $\vec{r}'$ และความเร็ว $\vec{v}'$ ของอนุภาคที่เวลา t' ต่อมาเล็กน้อย เนื่องจากอนุภาคเคลื่อนที่เป็นส่วนโค้งของวงกลม เวกเตอร์บอกตำแหน่งทั้ง

สองเวกเตอร์มีขนาดเท่ากันและเท่ากับรัศมี r ของวงกลม นอกจากนั้นความเร็วของอนุภาคที่ทั้งสองเวลาต่างมีทิศในแนวสัมผัสกับส่วนโค้งของวงกลม แต่มีขนาดไม่เท่ากันเนื่องจากอนุภาคกำลังเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว v ที่ไม่คงตัว ในรูปเราสมมุติว่าอัตราเร็วกำลังมีขนาดมากขึ้น เช่นเดียวกับในหัวข้อที่แล้ว ในการหาความเร่งเราหาความเร็วที่เปลี่ยนไปก่อน รูปข้างล่างแสดงให้เห็นเวกเตอร์ความเร็วที่เปลี่ยนไปเมื่อเวลาผ่านไปเล็กน้อย



ความเร็วที่เวลา t และที่เวลา t' ต่อมาเล็กน้อยเปลี่ยนไปด้วยสาเหตุสองประการ คือ (1) ขนาดของความเร็วเปลี่ยนจากขนาดเดิม v ไปเป็น v' ด้วยปริมาณ Δv (2) ทิศของความเร็วเบนไปจากแนวเดิม เพื่อที่จะแสดงให้เห็นการเปลี่ยนแปลงสองแบบนี้แยกกันในรูป เราแบ่งลูกศรที่แทนความเร็วใหม่ออกเป็นสองส่วนโดยเลือกจุด D ให้ AD ให้มีขนาดเท่าขนาดความเร็วเดิม v เพราะฉะนั้น DC แทนเฉพาะส่วน $\Delta v = v' - v$ ของ*ขนาด*ความเร็วที่เปลี่ยนไป ดังนั้นเราเขียนเวกเตอร์ความเร็วที่เปลี่ยนไปในรูปผลบวกเวกเตอร์ของเวกเตอร์สองเวกเตอร์ได้ดังนี้

$$\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\perp + \Delta\vec{v}_\parallel$$

ในที่นี้ $\Delta\vec{v}_\perp$ คือส่วนของเวกเตอร์ความเร็วที่เปลี่ยนไปเนื่องจากทิศเปลี่ยนไปอย่างเดียว และ $\Delta\vec{v}_\parallel$ คือส่วนที่เปลี่ยนไปเนื่องจากขนาดของความเร็วเปลี่ยนไปอย่างเดียว ในกรณีที่เวลาเปลี่ยนไปนิดเดียว มุม θ มีค่าเข้าหาศูนย์ และ $\Delta\vec{v}_\perp$ มีทิศตั้งฉากกับความเร็วเดิม $\vec{v}$ เราจึงเรียกเวกเตอร์ความเร็วที่เปลี่ยนไปส่วนนี้ว่า $\Delta\vec{v}_\perp$ เวกเตอร์ $\Delta\vec{v}_\parallel$ มีทิศเกือบขนานกับทิศความเร็วเดิม $\vec{v}$ เมื่อมุม θ มีค่าเข้าหาศูนย์ เราจึงเรียกเวกเตอร์ความเร็วที่เปลี่ยนไปส่วนนี้ว่า $\Delta\vec{v}_\parallel$

เพื่อที่จะหาความเร่งที่เวลา t เราเพียงแต่หารสมการ $\Delta\vec{v} = \Delta\vec{v}_\perp + \Delta\vec{v}_\parallel$ ข้างบนด้วยช่วงเวลา Δt ที่ความเร็วเปลี่ยนไป แล้วพิจารณาให้ช่วงเวลา Δt น้อยมากจนเข้าหาศูนย์ เราได้

$$\vec{a} = \vec{a}_\perp + \vec{a}_\parallel$$

โดยที่ $\vec{a}_\perp$ และ $\vec{a}_\parallel$ คือเวกเตอร์องค์ประกอบของความเร่งในทิศตั้งฉากและขนานกับความเร็วที่เวลา t

องค์ประกอบความเร่งในทิศ*ตั้งฉาก*กับความเร็วมีทิศเข้าหาศูนย์กลางของเส้นทางวงกลม เรามักใช้สัญลักษณ์ a_c แทนปริมาณนี้ (c ย่อมาจาก centre) ปริมาณนี้บอกเราว่า*ทิศ*ของความเร็วเปลี่ยนไปตามเวลาเร็วแค่ไหน ขนาดขององค์ประกอบนี้มีค่าเท่ากับ v^2/r ซึ่งเท่ากับขนาดของความเร่งในกรณีการเคลื่อนที่เป็นวงกลมด้วยอัตราเร็วคงตัว

องค์ประกอบความเร่งในทิศ*ขนาน*กับความเร็วอาจแทนได้ด้วยสัญลักษณ์ a_v องค์ประกอบนี้บอกเราว่า*ขนาด*ของความเร็วเปลี่ยนไปตามเวลาเร็วแค่ไหน ขนาดของความเร็วที่เปลี่ยนไปในทิศนี้คือ

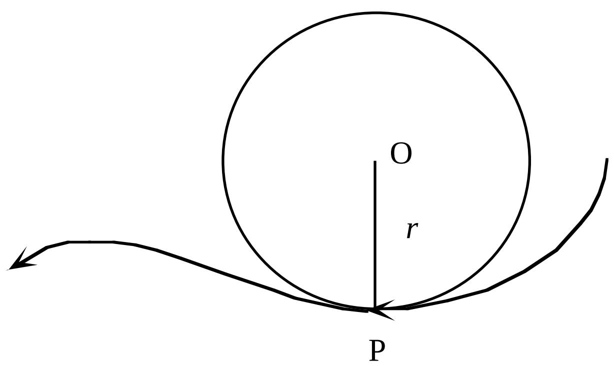
$$\left|\Delta\vec{v}_{\|}\right| = |\Delta v| = |v' - v|$$

ถ้าอัตราเร็วตอนหลังมากกว่าตอนแรก $\Delta\vec{v}_{\|}$ จะมีทิศเดียวกับ $\vec{v}$ แต่ถ้าอัตราเร็วที่เวลาต่อมามีขนาดน้อยกว่าตอนก่อนหน้า $\Delta\vec{v}_{\|}$ จะมีทิศตรงข้ามกับความเร็ว $\vec{v}$ ดังนั้นองค์ประกอบ a_v ของความเร่งในทิศของความเร็วมีค่าเท่ากับอัตราการเปลี่ยนแปลงอัตราเร็วเทียบกับเวลา องค์ประกอบนี้มีค่าเป็นบวกถ้าอัตราเร็วมากขึ้น เป็นลบถ้าอัตราเร็วลดลง และเป็นศูนย์ถ้าอัตราเร็วมีขนาดคงตัว ขนาดของความเร่งในทิศขนานกับความเร็วมีค่าดังนี้

$$|a_v| = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} = \frac{|r\omega' - r\omega|}{\Delta t} = \frac{r|\omega' - \omega|}{\Delta t} = r|\alpha|$$

การประยุกต์ใช้กับการเคลื่อนที่ในลักษณะทั่วไป

ส่วนของเส้นโค้งเรียบใด ๆ สามารถประมาณได้ด้วยส่วนของวงกลมที่สัมผัสกับเส้นโค้งที่ตรงนั้น (ดูรูปข้างล่าง) เราเรียกรัศมีของวงกลมนี้ว่า*รัศมีของความโค้ง*ของเส้นโค้งที่จุดนี้ ดังนั้นเราสามารถใช้ผลที่ได้มาข้างบนหาองค์ประกอบความเร่งของอนุภาคที่จุดใด ๆ บนเส้นโค้งเรียบใด ๆ ได้ถ้าเราใช้รัศมีของความโค้งที่จุดนั้นในการคำนวณ



ประมาณส่วนโค้งที่บริเวณใกล้จุด ๆ หนึ่งด้วยส่วนของวงกลม

สรุป อนุภาคที่เคลื่อนที่เป็นวงกลมมีความเร่งซึ่งมีองค์ประกอบในแนวขนานและตั้งฉากกับความเร็วขณะนั้น ความเร่งในแนวขนานกับความเร็วเกิดจากการเปลี่ยนขนาดของความเร็ว และมีค่า

$$a_v = r\alpha$$

ส่วนความเร่งในทิศตั้งฉากกับความเร็วมีทิศเข้าหาศูนย์กลางของวงกลม องค์ประกอบของความเร่งในทิศนี้วัดอัตราการเปลี่ยนทิศทางของความเร็วต่อเวลา และมีค่า

$$a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2 = v\omega$$

จะเห็นได้ว่า อนุภาคที่อยู่ห่างจากแกนเป็น 2 เท่ามีความเร่งในแนวเข้าสู่ศูนย์กลางเป็น 2 เท่า