การดลและโมเมนตัม

1. บทนำ

จากกฎของนิวตัน ถ้าเรารู้แรงสุทธิที่กระทำต่ออนุภาคที่เวลาต่าง ๆ เราก็รู้ว่าอนุภาคนั้นมีความเร่งเท่าไร และถ้าเรารู้ความเร็วต้น เราก็รู้ความเร็วของอนุภาคนั้นที่เวลาต่อมาได้ ซึ่งหมายความว่าถ้าเรารู้ตำแหน่งตั้งต้นของอนุภาค เราสามารถทำนายได้ว่าอนุภาคนั้นจะอยู่ที่ใดที่เวลาต่อมา แต่ว่าในสถานการณ์บางอย่าง เช่น ในการชน เราไม่รู้รายละเอียดเกี่ยวกับลักษณะของแรงทุกขณะ เราอาจวัดได้แต่ความเร็วของอนุภาคหนึ่งตอนก่อนชนและหลังชน และอาจวัดเวลาที่ใช้ในการชนได้ ในบทนี้เราจะแสดงให้เห็นว่าโดยการใช้กฎการคงตัวของปริมาณที่เรียกว่าโมเมนตัม เราสามารถหาความเร็วของอีกอนุภาคหนึ่งที่ชนกันได้

2. การดล

ในกรณีที่แรงคงที่ ความเร่งจะมีค่าคงที่ และเรารู้ว่าเราสามารถหาความเร็วและการกระจัดได้จากสูตรต่อไปนี้

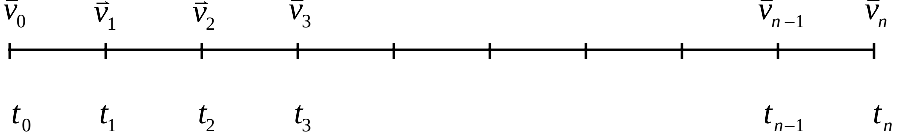
$$v(\text{ที่เวลา } t) = u + a(t - t_0)\,, \qquad \langle v \rangle_{t_A \to t_B} = \frac{1}{2}(v_B + v_A)$$

$$\Delta x = \langle v \rangle \Delta t\,, \qquad \Delta x(\text{ตั้งแต่ } t_A \text{ ถึง } t_B) = u(t_B - t_A) + \frac{1}{2} a \times (t_B - t_A)^2$$

$$2a\Delta x_{t_A \to t_B} = v_B^2 - v_A^2$$

ในกรณีที่แรงไม่คงที่ เราต้องแบ่งการพิจารณาออกเป็นช่วงเวลาเล็ก ๆ จำนวนมากซึ่งประมาณได้ว่าแรงในแต่ละช่วงคงที่ คำนวณความเร็วที่เปลี่ยนไปในแต่ละช่วง แล้วนำมารวมกันเป็นความเร็วที่เปลี่ยนไปทั้งหมดดังนี้

จากกฎของนิวตันข้อที่สอง $\vec{F}^{\text{สุทธิ}} = m\vec{a}$ ในกรณีที่ช่วงเวลาสั้นมาก ความเร่ง $\vec{a}$ มีค่าประมาณเท่ากับ $\dfrac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{v} - \vec{u}}{\Delta t}$ นั่นคือ $\vec{F}^{\text{สุทธิ}} \Delta t \approx m\vec{v} - m\vec{u}$ โดยที่ $\vec{u}$ คือความเร็วต้น และ $\vec{v}$ คือความเร็วปลาย สมมุติว่าเราแบ่งการพิจารณาการเคลื่อนที่ในช่วงเวลา t_0 ถึง $t_f = t_n$ เป็น n ช่วง ดังข้างล่างนี้



รูป 2.1

ให้ $\vec{v}_0, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3 \ldots\ldots \vec{v}_{n-1}, \vec{v}_n$ เป็นความเร็วที่เวลา $t_0, t_1, t_2, t_3 \ldots\ldots t_{n-1}, t_n$ ตามลำดับ และให้ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3 \ldots\ldots, \vec{F}_n$ เป็นแรงสุทธิที่ประมาณว่าคงที่ในช่วงที่ 1, 2,…, n ตามลำดับ

จาก $\vec{F}^{\text{สุทธิ}}\Delta t \approx m\vec{v} - m\vec{u}$ เราจะได้ว่า

$$\vec{F}_1 \times (t_1 - t_0) = \vec{F}_1\Delta t_1 \approx m\vec{v}_1 - m\vec{v}_0$$

$$\vec{F}_2 \times (t_2 - t_1) = \vec{F}_2\Delta t_2 \approx m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1$$

....

$$\vec{F}_n \times (t_n - t_{n-1}) = \vec{F}_n\Delta t_n \approx m\vec{v}_n - m\vec{v}_{n-1}$$

ถ้าเราบวกสมการข้างบนนี้เข้าด้วยกัน เราจะได้ว่า

$$\vec{F}_1 \times (t_1 - t_0) + \vec{F}_2 \times (t_2 - t_1) + ... + \vec{F}_n \times (t_n - t_{n-1}) = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\Delta t_i \approx m\vec{v}_n - m\vec{v}_0 = m\vec{v} - m\vec{u}$$

โดยที่เราให้ความเร็วตอนตั้งต้น $\vec{v}_0 = \vec{u}$ และความเร็วสุดท้าย $\vec{v}_n = \vec{v}$ ค่าที่ถูกต้องหาได้โดยการแบ่งช่วงการพิจารณาแต่ละช่วงเวลาให้สั้นมาก ๆ จนกระทั่งมีค่าเข้าหาศูนย์ ซึ่งมีค่าเท่ากับการแบ่งให้จำนวนช่วงมีค่าเข่าหาอนันต์

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i\Delta t_i = m\vec{v} - m\vec{u} \qquad \text{หรือ} \qquad \int_{t_0}^{t_f} \vec{F}dt = m\vec{v} - m\vec{u}$$

ปริมาณทางซ้ายมือของสมการเรียกว่า*การดล* และมักใช้สัญลักษณ์แทนว่า $\vec{I}$ สังเกตว่าปริมาณนี้เป็นปริมาณเวกเตอร์

$$\vec{I} \equiv \int_{t_0}^{t_f} \vec{F}dt = m\vec{v} - m\vec{u}$$

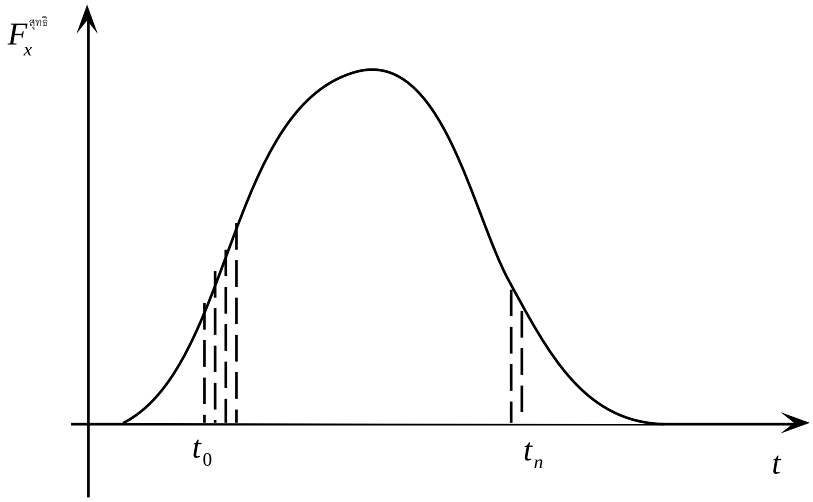
ปริมาณ $m\vec{v}$ คือ*โมเมนตัม* ของอนุภาคมวล m ที่มีความเร็ว $\vec{v}$ เรามักใช้สัญลักษณ์ $\vec{p} = m\vec{v}$ แทนโมเมนตัม ดังนั้น $m\vec{v} - m\vec{u}$ คือการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม $\Delta\vec{p}$ เพราะฉะนั้นเราได้ว่า

การดลมีค่าเท่ากับการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัม $\qquad \vec{I} = \Delta\vec{p}$

ในการหาค่าของการดล แรงที่ใช้คำนวณต้องเป็นแรงสุทธิซึ่งอาจประกอบด้วยแรงหลายแรงกระทำพร้อมกัน แต่ว่าในหลายสถานการณ์เราสามารถประมาณการหาค่าการดลได้ง่ายขึ้นถ้าแรงที่กระทำต่ออนุภาคในช่วงเวลาสั้น ๆ นั้นมีแรงหนึ่งซึ่งมีขนาดมากกว่าแรงอื่น ๆ มาก และเราประมาณว่าแรงนี้เป็นแรงเดียวที่กระทำต่ออนุภาคในช่วงเวลาสั้น ๆ นั้น การประมาณนี้มีประโยชน์ในการพิจารณาเรื่องการชนเมื่อช่วงเวลาที่แรงกระทำสั้นมาก ๆ ทำให้เราไม่ต้องสนใจแรงอื่น และทำให้เราพิจารณาเฉพาะแรงขนาดมหาศาลที่เกิดจากการชนเท่านั้น เราเรียกแรงนี้ว่า*แรงดล* ตัวอย่างเช่น เมื่อลูกกอล์ฟถูกตีด้วยไม้ ระยะเวลาที่ไม้กระทบลูกกอล์ฟอาจนานประมาณสองส่วนพันของวินาทีเท่านั้น และค่าแรงเฉลี่ยที่ไม้กระทำต่อลูกกอล์ฟในช่วงเวลานี้มีค่าหลายพันนิวตัน แรงขนาดนี้สูงกว่าแรงเนื่องจากความโน้มถ่วงมากนัก ดังนั้นเราจึงประมาณว่าในช่วงเวลานี้มีแต่แรงที่ไม้กระทำแรงเดียวได้

ข้อควรระวัง ในกรณีนี้โมเมนตัมที่เปลี่ยนไปต้องคิดจากโมเมนตัมก่อนและหลังการชน*ทันที*

เราสามารถคำนวณองค์ประกอบของการดลได้จากพื้นที่ใต้กราฟของกราฟระหว่างองค์ประกอบแรงสุทธิหรือแรงดลกับเวลา (ดูรูปข้างล่าง)



ถ้าเส้นโค้งของกราฟเป็นเส้นโค้งแบบง่าย ๆ เช่น เส้นตรง เราสามารถหาพื้นที่ใต้กราฟได้โดยง่าย

3. แรงเฉลี่ย

เช่นเดียวกับการหาความเร็วเฉลี่ยเมื่อความเร็วมีค่าไม่คงที่ ซึ่งหาได้จากนิยาม

ความเร็วเฉลี่ย = การกระจัดทั้งหมดหารด้วยช่วงเวลาที่ใช้

หรือ

$$\vec{v}_{\text{เฉลี่ย}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \; \vec{v}_1\Delta t_1 + \vec{v}_2\Delta t_2 + \ldots + \vec{v}_n\Delta t_n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\vec{v}_i\Delta t_i = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_f}\vec{v}\,dt$$

โดยที่ $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ คือความเร็วในช่วงเวลา $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n$ ตามลำดับ และ $\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 + \ldots + \Delta t_n$ คือช่วงเวลาทั้งหมด เราให้นิยาม*แรงเฉลี่ย* ดังนี้

$$\vec{F}_{\text{เฉลี่ย}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \; \vec{F}_1\Delta t_1 + \vec{F}_2\Delta t_2 + \ldots + \vec{F}_n\Delta t_n}{\Delta t} = \frac{1}{\Delta t}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i\Delta t_i = \frac{1}{\Delta t}\int_{t_0}^{t_f}\vec{F}\,dt$$

โดยที่ $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_n$ คือแรงในช่วงเวลา $\Delta t_1, \Delta t_2, \ldots, \Delta t_n$ ตามลำดับ

ถ้าเราใช้นิยามของแรงเฉลี่ย สมการการเปลี่ยนแปลงโมเมนตัมของอนุภาคจะกลายเป็น

$$\vec{I} = \vec{F}_{\text{เฉลี่ย}}\Delta t = m\vec{v} - m\vec{u} \quad \text{และดังนั้น} \quad \vec{F}_{\text{เฉลี่ย}} = \frac{m\vec{v} - m\vec{u}}{\Delta t}$$

4. การชนและกฎการคงตัวของโมเมนตัม

พิจารณาการชนระหว่างอนุภาค A และ B สองอนุภาค กฎของนิวตันข้อที่สองเมื่อใช้กับอนุภาคแต่ละอนุภาคคือ

$$\vec{F}_{\mathrm{A}}^{\text{สุทธิ}} = \vec{F}_{\mathrm{A}\ \text{โดย}\ \mathrm{B}} + \vec{F}_{\mathrm{A}\ \text{โดยแรงอื่น}} = m_{\mathrm{A}}\vec{a}_{\mathrm{A}} \qquad \text{และ} \qquad \vec{F}_{\mathrm{B}}^{\text{สุทธิ}} = \vec{F}_{\mathrm{B}\ \text{โดย}\ \mathrm{A}} + \vec{F}_{\mathrm{B}\ \text{โดยแรงอื่น}} = m_{\mathrm{B}}\vec{a}_{\mathrm{B}}$$

โดยที่เราได้แยกแรงสุทธิออกเป็นแรงที่กระทำโดยอนุภาคอีกอนุภาคหนึ่งบวกกับแรงที่กระทำโดยอนุภาคอื่นนอกจาก A และ B เราบวกสมการทั้งสองเข้าด้วยกัน และใช้ความรู้จากกฎนิวตันข้อที่สามที่ว่า $\vec{F}_{\mathrm{B}\ \text{โดย}\ \mathrm{A}} = -\vec{F}_{\mathrm{A}\ \text{โดย}\ \mathrm{B}}$ จะทำให้ได้ว่า

$$\vec{F}_{\mathrm{A}\ \text{โดยแรงอื่น}} + \vec{F}_{\mathrm{B}\ \text{โดยแรงอื่น}} = m_{\mathrm{A}}\vec{a}_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}\vec{a}_{\mathrm{B}}$$

พิจารณาในช่วงเวลา Δt สั้น ๆ และประมาณว่าความเร่งของอนุภาคทั้งสองมีค่าคงที่ เอาช่วงเวลา Δt คูณตลอด เราจะได้ว่า

$$(\vec{F}_{\mathrm{A}\ \text{โดยแรงอื่น}} + \vec{F}_{\mathrm{B}\ \text{โดยแรงอื่น}})\Delta t = m_{\mathrm{A}}\vec{a}_{\mathrm{A}}\Delta t + m_{\mathrm{B}}\vec{a}_{\mathrm{B}}\Delta t = m_{\mathrm{A}}(\vec{v}_{\mathrm{A}} - \vec{u}_{\mathrm{A}}) + m_{\mathrm{B}}(\vec{v}_{\mathrm{B}} - \vec{u}_{\mathrm{B}})$$

โดยที่เราได้ใช้นิยามของความเร่ง $\vec{a} = \dfrac{\vec{v} - \vec{u}}{\Delta t}$ หรือ $\vec{a}\Delta t = \vec{v} - \vec{u}$

ในการชนกันเราประมาณว่าแรงอื่นนอกจากแรงจากการชนมีขนาดน้อยมาก และเวลาที่ใช้ในการชนก็มีค่าน้อยมาก ๆ ด้วย ดังนั้นปริมาณทางซ้ายมือของสมการบนมีค่าประมาณเท่ากับศูนย์ ทำให้เราได้ว่า

$$\vec{0} = m_{\mathrm{A}}(\vec{v}_{\mathrm{A}} - \vec{u}_{\mathrm{A}}) + m_{\mathrm{B}}(\vec{v}_{\mathrm{B}} - \vec{u}_{\mathrm{B}})$$

หรือ

$$(m_{\mathrm{A}}\vec{v}_{\mathrm{A}} - m_{\mathrm{A}}\vec{u}_{\mathrm{A}}) = -(m_{\mathrm{B}}\vec{v}_{\mathrm{B}} - m_{\mathrm{B}}\vec{u}_{\mathrm{B}})$$

นั่นคือ *โมเมนตัมที่เปลี่ยนไปของอนุภาคหนึ่งมีขนาดเท่ากับโมเมนตัมที่เปลี่ยนไปของอีกอนุภาคหนึ่ง แต่มีทิศตรงกันข้าม* หรือเราอาจเขียนใหม่ในอีกรูปหนึ่งได้ว่า

$$(m_{\mathrm{A}}\vec{v}_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}\vec{v}_{\mathrm{B}}) = (m_{\mathrm{A}}\vec{u}_{\mathrm{A}} + m_{\mathrm{B}}\vec{u}_{\mathrm{B}})$$

นั่นคือ *โมเมนตัมทั้งหมดหลังการชนทันทีมีค่าเท่ากับโมเมนตัมทั้งหมดก่อนการชนพอดี* นี่คือ*กฎการคงตัวของโมเมนตัมเชิงเส้น* สำหรับอนุภาคสองอนุภาคเมื่อแรงภายนอกเป็นศูนย์หรือประมาณว่าเป็นศูนย์ได้

สำหรับระบบที่ประกอบด้วยอนุภาคหลายอนุภาค กฎนี้ก็ยังเป็นจริงอยู่ นั่นคือ

$$(m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + m_3\vec{v}_3 + .. + m_{\mathrm{n}}\vec{v}_{\mathrm{n}}) = (m_1\vec{u}_1 + m_2\vec{u}_2 + m_3\vec{u}_3 + .. + m_{\mathrm{n}}\vec{u}_{\mathrm{n}}) = \text{ค่าคงตัว}$$

5. การชนแบบยืดหยุ่นและไม่ยืดหยุ่น

พิจารณาการชนระหว่างวัตถุสองชิ้น เราเรียกการชนนี้ว่าเป็น*การชนแบบยืดหยุ่น* ถ้าพลังงานจลน์ทั้งหมดจากการเคลื่อนที่ของจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุมีค่าคงตัว ในทางกลับกันถ้าพลังงานจลน์ทั้งหมดของจุดศูนย์กลางมวลมีค่าไม่คงตัว เราเรียกว่าเป็น*การชนแบบไม่ยืดหยุ่น* ถ้าหลังการชนแล้ววัตถุไม่มีการเคลื่อนที่สัมพัทธ์กัน ("ติดกันไป") เราเรียกการชนนั้นว่าเป็น*การชนแบบไม่ยืดหยุ่นสมบูรณ์*

6. จุดศูนย์กลางมวล:

จุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ (มวล m) ชิ้นหนึ่งคือจุดตัวแทนซึ่งเคลื่อนที่ในลักษณะเดียวกันกับที่มวลจุด (ซึ่งมีมวล m) จะเคลื่อนที่เมื่อถูกแรงภายนอกเดียวกันกับที่กระทำต่อวัตถุกระทำ นั่นคือถ้าแรงลัพธ์ของแรงที่กระทำต่อวัตถุ (หรือระบบของวัตถุ) มวล m คือ $\vec{F}$ ความเร่งของจุดศูนย์กลางมวลของวัตถุ (หรือระบบ) จะหาได้จาก $\vec{a}_{\mathrm{cm}} = \vec{F}/m$

ถ้าเรามองวัตถุว่าประกอบด้วยมวลเล็ก ๆ m_1 , m_2 , m_3 และอื่น ๆ อยู่ที่ตำแหน่ง (x_1, y_1, z_1), (x_2 , y_2 , z_2) และอื่น ๆ แล้ว พิกัดของจุดศูนย์กลางมวลจะหาได้จาก

$$x_{\mathrm{cm}} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} \qquad y_{\mathrm{cm}} = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i} \qquad z_{\mathrm{cm}} = \frac{\sum z_i m_i}{\sum m_i}$$

โดยที่ผลบวกต่าง ๆ ครอบคลุมตลอดมวลทั้งหมดที่ประกอบเป็นวัตถุ ในสนามโน้มถ่วงที่สม่ำเสมอ จุดศูนย์กลางมวลและจุดศูนย์ถ่วงเป็นจุดเดียวกัน

แบบฝึกหัด

1. การชนแบบยืดหยุ่นระหว่างวัตถุที่มีมวลเท่ากัน

วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{u}_1$ เข้าชนวัตถุที่เหมือนกันทุกประการซึ่งอยู่นิ่ง ถ้าการชนเป็นการชนแบบยืดหยุ่น จงแสดงให้เห็นว่าหลังการชนวัตถุทั้งสองเคลื่อนที่ออกจากกันด้วยความเร็วในทิศที่ตั้งฉากกัน

2. การชนแบบยืดหยุ่นระหว่างวัตถุในแนวเส้นตรง

วัตถุหนึ่งเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว u_1 เข้าชนวัตถุอีกวัตถุหนึ่งซึ่งกำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว u_2 ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ถ้าการชนเป็นการชนแบบยืดหยุ่น จงแสดงให้เห็นว่าอัตราเร็วสัมพัทธ์ที่วัตถุทั้งสองเคลื่อนที่เข้าหากันมีขนาดเท่ากับอัตราเร็วสัมพัทธ์ที่วัตถุทั้งสองเคลื่อนที่ออกจากกัน

3. จงแสดงให้เห็นว่า*ในกรอบอ้างอิงของจุดศูนย์กลางมวล* วัตถุสองชิ้นที่ชนกันแบบยืดหยุ่นในข้อ 2 จะมีความเร็วหลังชนของแต่ละชิ้นในทิศสวนทางกับความเร็วเดิมโดยที่มีอัตราเร็วของแต่ละชิ้นเท่าเดิม

4. ก้อนวัตถุมวล 4 kg ซึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยอัตราเร็ว 6 m/s ชนอย่างยืดหยุ่นกับก้อนวัตถุมวล 2 kg ซึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปทางขวาด้วยอัตราเร็ว 3 m/s จงหาอัตราเร็วของก้อนวัตถุทั้งสองหลังการชน

5. ให้ทำข้อ 4 โดยการแปลงความเร็วอ้างอิงกับจุดศูนย์กลางมวล แล้วใช้ผลในข้อ 3 เสร็จแล้วจึงแปลงกลับมาเทียบกับจุดอ้างอิงธรรมดา

6. วัตถุมวล m_1 เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว u_1 เข้าชนอย่างยืดหยุ่นกับวัตถุมวล m_2 ซึ่งอยู่นิ่ง จงหาความเร็วของวัตถุชิ้นที่สองหลังการชน (แนะ: .ใช้ความรู้ข้อ 3 จะทำให้คิดได้ง่าย)

7. วัตถุหนึ่งมวล m_1 เคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{u}_1$ เข้าชนวัตถุมวล m_2 ซึ่งกำลังเคลื่อนที่ด้วยความเร็ว $\vec{u}_2$ ถ้าหลังการชนวัตถุทั้งสองเคลื่อนที่ไปด้วยกัน จงแสดงให้เห็นว่าในการชนนี้พลังงานจลน์ทั้งหมดก่อนชนมีขนาดมากกว่าพลังงานจลน์ทั้งหมดหลังชนอยู่เท่ากับ $\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(u_1^2+u_2^2-2u_1u_2\cos\theta\right)$ โดยที่ θ เป็นมุมระหว่างความเร็ว $\vec{u}_1$ และ $\vec{u}_2$

8. วางวัตถุสามชิ้นบนแกน x: 200 g ที่ $x = 0$, 500 g ที่ $x = 30$ cm และ 400 g ที่ $x = 70$ cm จงหาจุดศูนย์กลางมวลของมวลทั้งสาม

$$x_{\text{cm}} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} = \frac{(0)(0.20\text{ kg}) + (0.30\text{ m})(0.50\text{ kg}) + (0.70\text{ m})(0.40\text{ kg})}{(0.20+0.50+0.40)\text{ kg}} = 0.39\text{ m}$$

พิกัด y และ z ของจุดศูนย์กลางมวลเป็นศูนย์

9. ระบบ ๆ หนึ่งประกอบด้วยมวลต่อไปนี้ในระนาบ *xy*:
มวล 4.0 kg ที่พิกัด (x = 0, y = 5.0 m), มวล 7.0 kg ที่พิกัด (3.0 m, 8.0 m) และมวล 5.0 kg ที่พิกัด (–3.0 m, –6.0 m) จงหาตำแหน่งจุดศูนย์กลางมวลของระบบ

$$x_{\text{cm}} = \frac{\sum x_i m_i}{\sum m_i} = \frac{(0)(4.0\text{ kg}) + (3.0\text{ m})(7.0\text{ kg}) + (\text{-}3.0\text{ m})(5.0\text{ kg})}{(4.0 + 7.0 + 5.0)\text{ kg}} = 0.38\text{ m}$$

$$y_{\text{cm}} = \frac{\sum y_i m_i}{\sum m_i} = \frac{(5.0\text{ m})(4.0\text{ kg}) + (8.0\text{ m})(7.0\text{ kg}) + (\text{-}6.0\text{ m})(5.0\text{ kg})}{16\text{ kg}} = 2.9\text{ m}$$

และ $z_{\text{cm}} = 0$

10. รถไฟสองขบวนเหมือนกันทุกประการจอดนิ่งอยู่บนรางระดับโดยที่จุดศูนย์กลางของรถทั้งสองอยู่ห่างกัน D ใช้กว้านบนรถขบวนหนึ่งดึงรถทั้งสองเข้าหากันด้วยสายเคเบิลซึ่งผูกระหว่างรถทั้งสอง (*a*) จงบรรยายการเคลื่อนที่สัมพัทธ์ระหว่างรถทั้งสองขบวน (*b*) ทำซ้ำแต่ว่าให้มวลของรถขบวนหนึ่งเป็นสามเท่าของอีกขบวนหนึ่ง

แรงเนื่องจากเคเบิลที่ยึดระหว่างรถทั้งสองเป็นแรงภายในของระบบซึ่งประกอบด้วยรถทั้งสองขบวน แรงสุทธิภายนอกต่อระบบมีค่าเป็นศูนย์ และดังนั้นจุดศูนย์กลางมวลของระบบไม่เคลื่อนที่แม้ว่ารถแต่ละขบวนจะเคลื่อนที่เข้าหากัน เลือกจุดกำเนิดของพิกัดให้อยู่ที่จุดศูนย์กลางมวล เราจะได้ว่า

$$x_{\text{cm}} = 0 = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

โดยที่ x_1 และ x_2 เป็นตำแหน่งของจุดศูนย์กลางของรถทั้งสอง

(*a*) ถ้า $m_1 = m_2$ สมการนี้กลายเป็น $0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ หรือ $x_1 = -x_2$

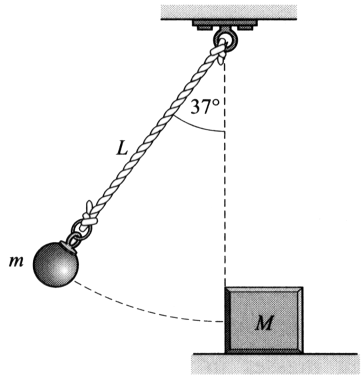
รถทั้งสองขบวนเคลื่อนเข้าหาจุดศูนย์กลางมวลซึ่งเดิมอยู่ที่กึ่งกลางระหว่างรถทั้งสอง (นั่นคือห่าง $D/2$ จากแต่ละขบวน) ในลักษณะที่ทำให้จุดศูนย์กลางของรถทั้งสองอยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางมวลเท่ากันตลอดเวลา

(*b*) ถ้า $m_1 = 3m_2$ เราจะได้ว่า $0 = \dfrac{3m_2 x_1 + m_2 x_2}{3m_2 + m_2} = \dfrac{3x_1 + x_2}{4}$

ซึ่งให้ $x_1 = -x_2/3$ รถทั้งสองเคลื่อนเข้าหากันในลักษณะที่ทำให้จุดศูนย์กลางมวลยังคงอยู่นิ่ง และรถขบวนที่หนักกว่าอยู่ห่างเป็นสามเท่าของรถที่เบากว่า

เดิมเนื่องจาก $|x_1| + |x_2| = D$ เราได้ว่า $x_2/3 + x_2 = D$ ดังนั้นเดิม m_2 อยู่ห่าง $x_2 = 3D/4$ จากจุดศูนย์กลางมวล และ m_1 อยู่ห่าง $D/4$ จากจุดศูนย์กลางมวล

11. นาฬิกาลูกตุ้มซึ่งประกอบด้วยลูกบอลมวล m ถูกปล่อยให้เคลื่อนที่จากตำแหน่งที่แสดงในรูปข้างล่าง และชนก้อนวัตถุมวล M ก้อนวัตถุไถลไปเป็นระยะทาง D ก่อนหยุดนิ่งภายใต้การกระทำของแรงเสียดทานคงตัวขนาด $0.20Mg$ จงหา D ถ้าลูกบอลกระดอนกลับขึ้นไปถึงตำแหน่งที่ทำมุม $20°$



ลูกตุ้มนาฬิกาตกลงมาเป็นระยะความสูง $(L - L\cos 37°) = 0.201L$ และกระดอนกลับไปที่ความสูง $(L - L\cos 20°) = 0.0603L$ เนื่องจากสำหรับลูกบอล $(mgh)_{\text{บน}} = (\frac{1}{2}mv^2)_{\text{ล่าง}}$ อัตราเร็วของลูกบอลที่จุดล่างจึงมีค่า $v = \sqrt{2gh}$

แม้ว่าพลังงานจลน์จะไม่คงตัวในการชนกัน แต่ว่าโมเมนตัมคงตัว ดังนั้นสำหรับการชนนี้

โมเมนตัมก่อนชนพอดี = โมเมนตัมหลังชนพอดี

$$m\sqrt{2g(0.201)L} + 0 = -m\sqrt{2g(0.0603)L} + MV$$

โดยที่ V คือความเร็วของก้อนวัตถุหลังการชนพอดี (สังเกตเครื่องหมายลบที่โมเมนตัมของลูกบอลที่กระดอนกลับ) แก้สมการนี้ เราจะได้

$$V = \frac{m}{M}0.981\sqrt{gL}$$

ก้อนวัตถุใช้พลังงานจลน์ของการเลื่อนตำแหน่งในการทำงานต้านแรงเสียดทานในขณะที่มันเลื่อนไถลไปเป็นระยะทาง D ดังนั้น

$$\tfrac{1}{2}MV^2 = F_f D \quad \text{หรือ} \quad \tfrac{1}{2}M(0.963gL)\left(\frac{m}{M}\right)^2 = (0.20Mg)(D)$$

ซึ่งให้ $D = 2.4(m/M)^2 L$

12. ลูกบอลมวลเท่ากันสองลูกเคลื่อนที่เข้าหาจุดกำเนิดของระบบพิกัด ลูกบอลลูกหนึ่งเคลื่อนที่ลงมาตามแกน $+y$ ด้วยอัตราเร็ว 2.00 m/s และอีกลูกหนึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปทางขวาตามแกน $-x$ ด้วยอัตราเร็ว 3.00 m/s หลังจากที่ลูกบอลทั้งสองชนกันลูกบอลลูกหนึ่งเคลื่อนที่ออกไปทางขวาตามแกน $+x$ ด้วยอัตราเร็ว 1.20 m/s จงหาองค์ประกอบสเกลาร์ตามแกน x และ y ของความเร็วของลูกบอลอีกลูกหนึ่ง

เลือกทิศ*ขึ้น* และทิศ*ขวามือ* เป็นบวก โมเมนตัมคงตัวในการชน ดังนั้นเราเขียนได้ว่า

(โมเมนตัมก่อน)$_x$ = (โมเมนตัมหลัง)$_x$

หรือ $$m(3.00\ \text{m/s}) + 0 = m(1.20\ \text{m/s}) + mv_x$$

และ (โมเมนตัมก่อน)$_y$ = (โมเมนตัมหลัง)$_y$

หรือ $$0 + m(-2.00\ \text{m/s}) = 0 + mv_y$$

(ทำไมเครื่องหมายลบ?) แก้สมการ เราได้ว่า $v_x = 1.80\ \text{m/s}$ และ $v_y = -2.00\ \text{m/s}$

13. รถบรรทุกมวล 7500 kg เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว 5.0 m/s ไปทางทิศตะวันออกชนเข้ากับรถยนต์มวล 1500 kg คันหนึ่งซึ่งกำลังแล่นมาด้วยอัตราเร็ว 20 m/s ในทิศทำมุม 30° ไปทางใต้ของทิศตะวันตก หลังการชนรถทั้งสองติดกันไป จงหาว่าซากรถที่พังทั้งสองจะเริ่มเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วเท่าไรและไปทางทิศใด

ตอบ อัตราเร็วลัพธ์คือ $v = \sqrt{(1.67\ \text{m/s})^2 + (1.28\ \text{m/s})^2} = 2.1\ \text{m/s}$ $\theta = \arctan\left(\frac{1.67}{1.28}\right) = 53°$

14. ลูกบอลเหมือนกันทุกประการสองลูกชนกันแบบประสานงา ความเร็วเดิมของลูกหนึ่งมีค่า 0.75 m/s ทิศตะวันออก ขณะที่อีกลูกหนึ่งมีความเร็วเดิม 0.43 m/s ทิศตะวันตก ถ้าการชนเป็นแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ จงหาความเร็วสุดท้ายของลูกบอลแต่ละลูก

เนื่องจากการชนเป็นแบบประสานงา การเคลื่อนที่ทุกอย่างเกิดขึ้นในแนวเส้นตรง เลือกให้ทิศตะวันออกเป็นทิศบวก และให้มวลของลูกบอลแต่ละลูกเป็น m โมเมนตัมมีค่าคงตัวในการชน ดังนั้นเราเขียนได้ว่า

โมเมนตัมก่อน = โมเมนตัมหลัง

$$m(0.75\ \text{m/s}) + m(-0.43\ \text{m/s}) = mv_1 + mv_2$$

โดยที่ v_1 และ v_2 เป็นความเร็วหลังชน สมการนี้เขียนให้อยู่ในรูปง่าย ๆ ได้ว่า

$$0.32\ \text{m/s} = v_1 + v_2 \qquad (1)$$

เนื่องจากเราสมมุติว่าการชนเป็นแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ พลังงานจลน์ต้องคงตัวด้วย ดังนั้น

พลังงานจลน์ก่อน = พลังงานจลน์หลัง

$$\tfrac{1}{2}m(0.75\ \text{m/s})^2 + \tfrac{1}{2}m(0.43\ \text{m/s})^2 = \tfrac{1}{2}mv_1^2 + \tfrac{1}{2}mv_2^2$$

สมการนี้สามารถเขียนเป็นรูปง่าย ๆ ได้ว่า

$$0.747\ (\mathrm{m/s})^2 = v_1^2 + v_2^2 \qquad (2)$$

เราสามารถหา v_2 โดยการแก้สมการ (1) ได้ $v_2 = 0.32\ \mathrm{m/s} - v_1$ และแทนค่านี้ใน (2) จะให้

$$0.747\ (\mathrm{m/s})^2 = (0.32\ \mathrm{m/s} - v_1)^2 + v_1^2$$

ซึ่งให้

$$2v_1^2 - 0.64\ \mathrm{m/s}\, v_1 - 0.645\ (\mathrm{m/s})^2 = 0$$

ใช้สูตรควอดราติกหารากของสมการนี้ เราได้ว่า

$$v_1 = \left[\frac{0.64 \pm \sqrt{(0.64)^2 + 5.16}}{4}\right]\ \mathrm{m/s} = [0.16 \pm 0.59]\ \mathrm{m/s}$$

ซึ่งให้ $v_1 = 0.75\ \mathrm{m/s}$ หรือ $-0.43\ \mathrm{m/s}$ แทนค่านี้กลับลงใน (1) ให้

$$v_2 = -0.43\ \mathrm{m/s} \text{ หรือ } 0.75\ \mathrm{m/s}$$

มีคำตอบให้เลือกสองคำตอบ:

$$(v_1 = 0.75\ \mathrm{m/s},\ v_2 = -0.43\ \mathrm{m/s}) \text{ และ } (v_1 = -0.43\ \mathrm{m/s},\ v_2 = 0.75\ \mathrm{m/s})$$

เราต้องทิ้งคำตอบแรกไปเพราะมันเป็นกรณีที่ลูกบอลเคลื่อนที่ต่อไปโดยไม่มีการเปลี่ยนแปลง นั่นคือ ไม่มีการชนเกิดขึ้น ดังนั้นคำตอบที่ถูกต้องคือ $v_1 = -0.43\ \mathrm{m/s}$ และ $v_2 = 0.75\ \mathrm{m/s}$ ซึ่งบอกให้เรารู้ว่าในการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์และแบบประสานงาระหว่างมวลขนาดเท่ากัน วัตถุทั้งสองจะสลับความเร็วกัน ดังนั้น $\vec{\mathbf{v}}_1 = 0.43\ \mathrm{m/s}$ ทิศตะวันตก และ $\vec{\mathbf{v}}_2 = 0.75\ \mathrm{m/s}$ ทิศตะวันออก

15. ลูกบอลมวล $1.0\ \mathrm{kg}$ เคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็ว $12\ \mathrm{m/s}$ เข้าชนแบบประสานงากับลูกบอลมวล $2.0\ \mathrm{kg}$ ซึ่งกำลังเคลื่อนที่เข้ามาในทิศตรงกันข้ามด้วยอัตราเร็ว $24\ \mathrm{m/s}$ จงหาความเร็วของลูกบอลแต่ละลูกหลังการชน ถ้า (*a*) ลูกบอลติดกันไป และ (*b*) การชนเป็นแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์

ในทั้งสองกรณีโมเมนตัมคงตัว และดังนั้นเราสามารถเขียนได้ว่า

โมเมนตัมก่อน = โมเมนตัมหลัง

$$(1.0\ \mathrm{kg})(12\ \mathrm{m/s}) + (2.0\ \mathrm{kg})(-24\ \mathrm{m/s}) = (1.0\ \mathrm{kg})v_1 + (2.0\ \mathrm{kg})v_2$$

ซึ่งกลายเป็น

$$-36\ \mathrm{m/s} = v_1 + 2v_2$$

(*a*) ในกรณีนี้ $v_1 = v_2 = v$ และดังนั้นสมการโมเมนตัมกลายเป็น

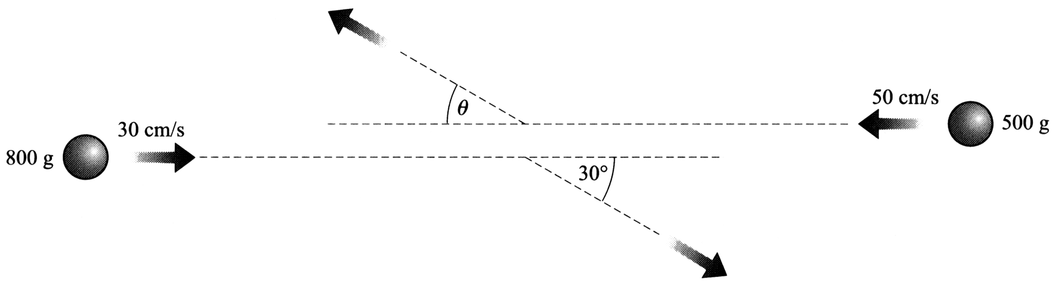
$$3v = -36\ \mathrm{m/s} \quad \text{หรือ} \quad v = -12\ \mathrm{m/s}$$

(*b*) ในกรณีนี้

$$v_2 - v_1 = (12\ \text{m/s}) - (-24\ \text{m/s})$$

ซึ่งให้ $v_2 - v_1 = 36\ \text{m/s}$ บวกสมการนี้เข้ากับสมการโมเมนตัมให้ $v_2 = 0$ ใช้ค่านี้สำหรับ v_2 ทำให้ได้ $v_1 = -36\ \text{m/s}$

16. ลูกบอลสองลูกในรูปข้างล่างชนและกระเด้งออกจากกันดังที่แสดงในรูป (*a*) ลูกบอลมวล $500\ \text{g}$ มีความเร็วสุดท้ายเท่าไรถ้าลูกบอลมวล $800\ \text{g}$ มีอัตราเร็ว $15\ \text{cm/s}$ หลังการชน (*b*) การชนเป็นแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์หรือไม่



(*a*) เลือกทิศการเคลื่อนที่ทางขวาเป็นทิศบวก จากกฎการคงตัวของโมเมนตัม

(โมเมนตัมก่อน)$_x$ = (โมเมนตัมหลัง)$_x$

$$(0.80\ \text{kg})(0.30\ \text{m/s}) + (0.50\ \text{kg})(-0.50\ \text{m/s}) = (0.80\ \text{kg})[(0.15\ \text{m/s})\cos 30°] + (0.50\ \text{kg})v_x$$

ซึ่งให้ $v_x = -0.228\ \text{m/s}$ เลือกให้ทิศขึ้นเป็นทิศบวก

(โมเมนตัมก่อน)$_y$ = (โมเมนตัมหลัง)$_y$

$$0 = (0.80\ \text{kg})[-(0.15\ \text{m/s})\ \sin 30°] + (0.50\ \text{kg})v_y$$

ซึ่งให้ $v_y = 0.120\ \text{m/s}$ ดังนั้น

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{(-0.228\ \text{m/s})^2 + (0.120\ \text{m/s})^2} = 0.26\ \text{m/s}$$

และ $\vec{\mathbf{v}} = 0.26\ \text{m/s}$ ทิศไปทางขวา

นอกจากนั้น สำหรับมุม θ ในรูป 8-4

$$\theta = \arctan\left(\frac{0.120}{0.228}\right) = 28°$$

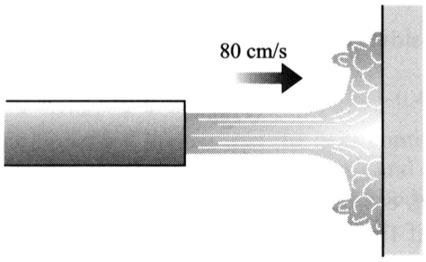
(*b*) พลังงานจลน์ทั้งหมดก่อน
$= \frac{1}{2}(0.80\ \text{kg})(0.30\ \text{m/s})^2 + \frac{1}{2}(0.50\ \text{kg})(0.50\ \text{m/s})^2 = 0.099\ \text{J}$

พลังงานจลน์ทั้งหมดหลัง

$= \frac{1}{2}(0.80\ \text{kg})(0.15\ \text{m/s})^2 + \frac{1}{2}(0.50\ \text{kg})(0.26\ \text{m/s})^2 = 0.026\ \text{J}$

เนื่องจากมีการสูญเสียพลังงานจลน์ในการชน การชนนี้จึงไม่ใช่เป็นการชนแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์

17. จงหาแรงที่กระทำต่อแผ่นจานแบนที่ถูกจับให้อยู่นิ่งตั้งฉากกับลำน้ำดังในรูปข้างล่าง อัตราเร็วของน้ำในแนวระดับมีค่า 80 cm/s และน้ำปริมาณ 30 mL ชนแผ่นจานทุกวินาที ให้สมมุติว่าน้ำเคลื่อนที่ขนานกับแผ่นจานหลังจากที่ชน น้ำหนึ่งมิลลิลิตร (mL) มีมวล 1.00 g



จานออกแรงดลกระทำต่อน้ำและทำให้โมเมนตัมตามแนวระดับของน้ำเปลี่ยนไป เลือกให้ทิศขวามือเป็นบวก

$$(\text{การดล})_x = \text{โมเมนตัมในทิศ } x \text{ ที่เปลี่ยนไป}$$

$$F_x \Delta t = (mv_x)_{\text{สุดท้าย}} - (mv_x)_{\text{ต้น}}$$

ให้เราเลือก Δt เป็น 1.00 s ทำให้ m เป็นมวลที่กระทบใน 1.00 s มีขนาดเท่ากับ 30 g สมการข้างบนจะกลายเป็น

$$F_x(1.00\ \text{s}) = (0.030\ \text{kg})(0\ \text{m/s}) - (0.030\ \text{kg})(0.80\ \text{m/s})$$

ซึ่งให้ $F_x = -0.024\ \text{N}$ นี่คือแรงที่จานกระทำต่อน้ำ กฎของแรงกิริยาและแรงปฏิกิริยาบอกเราว่าลำน้ำออกแรงขนาดเท่ากันแต่ทิศตรงกันข้ามกระทำต่อจาน

18. จรวดลำหนึ่งยืนอยู่บนฐานยิงโดยที่หัวชี้ขึ้นตรง เครื่องยนต์ไอพ่นของจรวดติดเครื่องและพ่นก๊าซออกมาด้วยอัตรา 1500 kg/s โมเลกุลที่ถูกพ่นออกมีอัตราเร็ว 50 km/s เดิมจรวดต้องมีมวลเท่าไรจึงจะทำให้จรวดค่อย ๆ ลอยขึ้นช้า ๆ เนื่องจากแรงขับของเครื่องยนต์

เนื่องจากการเคลื่อนที่ของตัวจรวดเองมีน้อยมากเมื่อเทียบกับอัตราเร็วของก๊าซที่พ่นออกมา เราสามารถสมมุติได้ว่าก๊าซถูกเร่งจากหยุดนิ่งจนมีอัตราเร็ว 50 km/s การดลที่จำเป็นในการเร่งมวล m ของก๊าซคือ

$$F\Delta t = mv_f - mv_i = m(50000\ \text{m/s}) - 0$$

ซึ่งให้
$$F = (50000\ \text{m/s})\frac{m}{\Delta t}$$

แต่เรารู้ว่ามวลที่ถูกพ่นออกมาต่อวินาที $(m/\Delta t)$ คือ $1500\ \mathrm{kg/s}$ และดังนั้นแรงที่กระทำต่อก๊าซที่ถูกพ่นออกมาคือ

$$F = (50000\ \mathrm{m/s})(1500\ \mathrm{kg/s}) = 75\ \mathrm{MN}$$

แรงที่ขนาดเท่ากันแต่ทิศตรงกันข้ามกระทำต่อจรวด และนี่คือแรงขับขึ้นที่กระทำต่อจรวด ดังนั้นเครื่องยนต์สามารถรับน้ำหนักได้ 75 MN และจรวดสามารถมีมวลสูงสุดได้เท่ากับ

$$M_{\text{จรวด}} = \frac{\text{น้ำหนัก}}{g} = \frac{75\times10^{6}\ \mathrm{N}}{9.81\ \mathrm{m/s^2}} = 7.7\times10^{6}\ \mathrm{kg}$$

19. ทรายตกลงมาด้วยอัตรา 2000 kg/นาที จากก้นของปล่องลงบนสายพานซึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปตามแนวระดับด้วยอัตราเร็ว 250 m/นาที จงหาแรงที่จำเป็นต้องใช้ในการขับเคลื่อนสายพาน ไม่ต้องคำนึงถึงแรงเสียดทาน *ตอบ* 139 N

20. วัตถุสองชิ้นมวล 8 kg และ 4 kg เคลื่อนที่ตามแกน x ในทิศตรงกันข้ามด้วยความเร็ว 11 m/s ในทิศบวก x และ 7 m/s ในทิศลบ x ตามลำดับ วัตถุทั้งสองชนและติดกัน จงหาความเร็วของวัตถุทั้งสองหลังการชนทันที *ตอบ* 5 m/s ทิศบวก x

21. ปืนกระบอกหนึ่งมวล 1200 kg ซึ่งตั้งอยู่บนล้อยิงโพรเจกไทล์มวล 8.00 kg ออกไปด้วยความเร็วปากกระบอก 600 m/s ทำมุม 30.0° เหนือแนวระดับ จงหาอัตราเร็วที่ปืนกระดอนกลับในแนวระดับ *ตอบ* 3.46 m/s

22. มวลสามก้อนถูกวางไว้บนแกน y ณ ตำแหน่งต่อไปนี้: 2 kg ที่ y = 300 cm, 6 kg ที่ y = 150 cm และ 4 kg ที่ y = –75 cm จงหาจุดศูนย์กลางมวลของระบบ *ตอบ* y = 1 m

23. มวลสี่ก้อนถูกวางไว้ในระนาบ xy ณ ตำแหน่งต่อไปนี้: 300 g ที่ (x = 0, y = 2.0 m), 500 g ที่ (–2.0 m, –3.0 m), 700 g ที่ (50 cm, 30 cm) และ 900 g ที่ (–80 cm, 150 cm)
จงหาจุดศูนย์กลางมวลของระบบ *ตอบ* x = -0.57 m, y = 0.28 m

24. ลูกบอลมวล m ลูกหนึ่งวางอยู่ที่จุดกำเนิดในขณะที่มันระเบิดออกเป็นสองชิ้นซึ่งพุ่งออกไปตามแกน x ในทิศตรงกันข้าม ขณะที่ชิ้นหนึ่ง (ซึ่งมีมวล $0.270m$) อยู่ที่ x = 70 cm อีกชิ้นหนึ่งอยู่ที่ไหน (*แนะ*: จุดศูนย์กลางมวลเคลื่อนที่อย่างไร) *ตอบ* ที่ x = –26 cm

25. ลูกบอลมวล m ลูกหนึ่งซึ่งอยู่นิ่งที่จุดกำเนิดระเบิดออกเป็นสามชิ้นเท่ากัน ที่เวลาขณะหนึ่งชิ้นหนึ่งอยู่บนแกน x ที่ x = 40 cm และอีกชิ้นหนึ่งอยู่ที่ x = 20 cm, y = –60 cm ในขณะนั้นชิ้นที่สามอยู่ที่ไหน *ตอบ* ที่ x = –60 cm, y = 60 cm

26. ก้อนไม้มวล 2.0 kg อยู่นิ่งบนผิวโต๊ะยาว ยิงลูกปืนมวล 5.0 g ในแนวระดับด้วยอัตราเร็ว 150 m/s เข้าไปฝังในก้อนไม้ ก้อนไม้ไถลไปบนโต๊ะเป็นระยะทาง 270 cm แล้วจึงหยุด (*a*) จงหาอัตราเร็วของก้อนไม้ทันทีหลังการชน (*b*) จงหาแรงเสียดทานระหว่างก้อนไม้กับพื้นโต๊ะ

ตอบ (*a*) 0.37 m/s, (*b*) 0.052 N

27. ก้อนไม้มวล 2.0 kg อยู่นิ่งบนผิวโต๊ะ ยิงลูกปืนมวล 7.0 g ขึ้นมาตรง ๆ ทะลุผ่านรูในโต๊ะตรงตำแหน่งใต้ก้อนไม้พอดี ลูกปืนฝังอยู่ในก้อนไม้และทำให้ก้อนไม้ลอยขึ้นมาสูง 25 cm เหนือผิวโต๊ะ จงหาว่าเดิมลูกปืนมีอัตราเร็วเท่าไร *ตอบ* 0.64 km/s

28. รถบรรทุกมวล 6000 kg กำลังเคลื่อนที่ไปทางเหนือด้วยอัตราเร็ว 5.0 m/s เมื่อมันชนเข้ากับรถบรรทุกมวล 4000 kg ซึ่งกำลังเคลื่อนที่ไปทางทิศตะวันตกด้วยอัตราเร็ว 15 m/s ถ้ารถบรรทุกทั้งสองติดกันหลังชน จงหาอัตราเร็วและทิศทางที่รถทั้งสองเคลื่อนที่หลังจากการชนทันที
ตอบ 6.7 m/s ทำมุม 27° ไปทางเหนือของทิศตะวันตก

29. จงหาแรงต้านเฉลี่ยที่จะต้องกระทำต่อมวล 3.0 kg เพื่อลดอัตราเร็วของมวลจาก 65 cm/s เป็น 15 cm/s ในเวลา 0.20 s *ตอบ* 7.5 N

30. ลูกกระสุนปืนมวล 7.00 g เคลื่อนที่ในแนวระดับด้วยอัตราเร็ว 200 m/s เข้าชนและทะลุผ่านกระป๋องมวล 150 g ซึ่งวางอยู่บนเสา ทันทีหลังการชนกระป๋องมีอัตราเร็วในแนวระดับ 180 cm/s จงหาอัตราเร็วของลูกปืนหลังจากที่ออกจากกระป๋อง *ตอบ* 161 cm/s

31. ลูกบอลเหมือนกันสองลูกชนกันที่จุดกำเนิด ก่อนการชนองค์ประกอบสเกลาร์ของความเร็วของลูกบอลทั้งสองคือ ($u_x = 40$ cm/s , $u_y = 0$) และ ($u_x = -30$ cm/s , $u_y = 20$ cm/s) หลังการชนลูกบอลลูกที่หนึ่งหยุดนิ่ง จงหาองค์ประกอบสเกลาร์ของความเร็วของลูกบอลลูกที่สอง *ตอบ* $v_x = 10$ cm/s , $v_y = 20$ cm/s

32. ลูกบอลเหมือนกันทุกประการสองลูกเคลื่อนที่ขนานไปกับแกน x ด้วยอัตราเร็ว 30 cm/s ในทิศตรงกันข้าม ลูกบอลทั้งสองชนกันแบบยืดหยุ่นสมบูรณ์ หลังการชนลูกบอลลูกหนึ่งเคลื่อนที่ออกไปทำมุม 30° เหนือแกน $+x$ จงหาอัตราเร็วและความเร็วของลูกบอลอีกลูกหนึ่ง
ตอบ 30 cm/s, 30 cm/s ทำมุม 30° ใต้แกน $-x$ (ตรงกันข้ามกับลูกแรก)

33. (*a*) เครื่องยนต์ไอพ่นของจรวดมวล 2.0×10^5 kg จะต้องมีแรงขับอย่างน้อยที่สุดเท่าไรจึงจะทำให้จรวดสามารถลอยขึ้นจากพื้นดินได้เมื่อตั้งหัวขึ้นตรง ๆ (*b*) ถ้าเครื่องยนต์ขับเชื้อเพลิงออกมาในอัตรา 20 kg/s เชื้อเพลิงนี้จะต้องมีอัตราเร็วเท่าไรในขณะที่มันออกจากเครื่อง ให้ถือว่ามวลของจรวดที่เปลี่ยนไปเนื่องจากเชื้อเพลิงที่พ่นออกมามีค่าน้อยมากจนไม่ต้องนำมาคิด
ตอบ (*a*) 20×10^5 N; (*b*) 98 km/s