ตัวเก็บประจุไฟฟ้าและความจุไฟฟ้า

ตัวเก็บประจุไฟฟ้าเป็นเครื่องมือซึ่งประกอบด้วยตัวนำสองชิ้นแยกกันโดยที่ตัวหนึ่งมีประจุ $+|q|$ และอีกตัวนำหนึ่งมีประจุ $-|q|$ การที่ตัวนำทั้งสองมีประจุขนาดเท่ากันแต่เครื่องหมายตรงกันข้ามนี้ ทำได้โดยเอาตัวนำสองชิ้นซึ่งแต่เดิมเป็นกลางมา แล้วถ่ายโอนประจุ $+|q|$ จากตัวนำหนึ่งไปไว้บนอีกตัวนำหนึ่ง ในการย้ายประจุจากที่หนึ่งไปยังอีกที่หนึ่งนี้เราจะต้องทำงานต้านกับแรงไฟฟ้า ดังนั้นตัวนำทั้งสองจะมีศักย์ไฟฟ้าต่างกัน ความต่างศักย์ไฟฟ้านี้แปรผันโดยตรงกับขนาดประจุไฟฟ้า $|q|$ ถ้าให้ V เป็นขนาดของความต่างศักย์ไฟฟ้าระหว่างตัวนำที่มีประจุ $+|q|$ กับตัวนำที่มีประจุ $-|q|$ เราจะได้ว่า

$$V \propto |q|$$

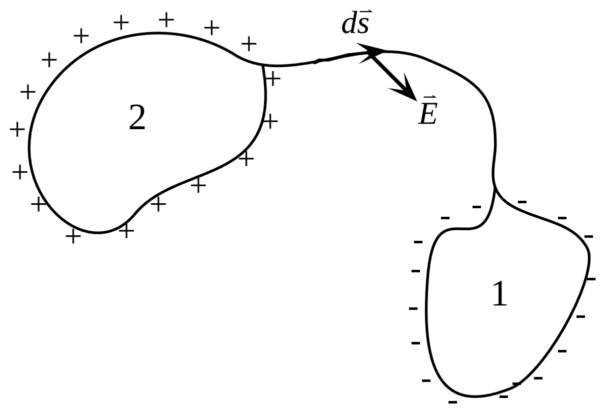
หรือ

$$V = \frac{1}{C}|q|$$

โดยที่ C เป็นค่าคงตัวเรียกว่า*ความจุไฟฟ้า* C เป็นปริมาณบวกและมีค่าขึ้นกับรูปทรงทางเรขาคณิตของตัวเก็บประจุและขึ้นกับคุณสมบัติของฉนวนที่คั่นระหว่างตัวนำทั้งสองเท่านั้น โดยทั่วไปความสัมพันธ์ข้างบนมักเขียนในรูป

$$|q| = CV$$

สำหรับความต่างศักย์ไฟฟ้าระหว่างตัวนำค่าหนึ่ง ถ้า C มีค่ามาก ตัวเก็บประจุนี้ก็จะสามารถเก็บประจุได้มาก การใช้งานของตัวเก็บประจุไฟฟ้าหนึ่งก็คือใช้เก็บประจุไฟฟ้าชั่วคราว! ต่อไปเราจะแสดงให้ดูอย่างคร่าวๆ ว่าสมการ $|q| = CV$ เป็นจริงได้อย่างไร



พิจารณาชิ้นตัวนำใดๆ ซึ่งเป็นกลางทางไฟฟ้า เราจะเรียกตัวนำนี้ว่าตัวนำ 1 เราจะให้ประจุ $-|q|$ แก่ตัวนำ 1 โดยถ่ายโอนอิเล็กตรอนจากตัวนำ 2 ซึ่งเดิมเป็นกลาง สมมุติว่าไม่มีสิ่งอื่นใดอยู่ในบริเวณนั้นอีก การที่เอาประจุ $-|q|$ ออกจากตัวนำ 2 ทำให้ตัวนำ 2 มีประจุ $+|q|$ ในเวลาเดียวกันกับที่ตัวนำ 1 มีประจุ $-|q|$ การที่ตัวนำมีประจุไฟฟ้าทำให้มีสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ ในบริเวณรอบ ๆ ซึ่งหมายความว่าตัวนำทั้งสองมีศักย์ไฟฟ้าที่ต่างกัน

เราต้องการหาความต่างศักย์ไฟฟ้าระหว่างตัวนำทั้งสองนี้ ให้ V เป็นศักย์ไฟฟ้าของตัวนำบวกเทียบกับตัวนำลบ V จะเป็นขนาดของความต่างศักย์ไฟฟ้าระหว่างตัวนำทั้งสองเพราะศักย์ไฟฟ้าของตัวนำบวกมีค่ามากกว่าของตัวนำลบ

$$V \equiv V_{\text{บวก}} - V_{\text{ลบ}} = -\int_{\text{ลบ}}^{\text{บวก}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{\text{บวก}}^{\text{ลบ}} \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

เราสามารถคำนวณปริมาณข้างบนตามเส้นทางใด ๆ จากจุดใด ๆ บนตัวนำ 1 ไปยังจุดใด ๆ บนตัวนำ 2 ก็ได้ เพราะว่าแรงไฟฟ้าสถิตเป็นแรงอนุรักษ์ ค่าของความต่างศักย์ไฟฟ้า V ไม่ขึ้นกับเส้นทางที่ใช้ในการอินทิเกรต $\vec{E}\cdot d\vec{s}$ ระหว่างตัวนำ แต่ว่าขึ้นกับค่าของ $\vec{E}$ และค่าของ $\vec{E}$ ที่จุดต่าง ๆ ขึ้นกับปัจจัยสองอย่าง

(1) $\vec{E}$ ขึ้นกับรูปทรงทางเรขาคณิตของระบบ นั่นคือขึ้นกับรูปร่างของตัวนำและระยะห่างระหว่างตัวนำ

(2) $\vec{E}$ ขึ้นกับขนาด $|q|$ ของประจุบนตัวนำ สมมุติว่าเราเพิ่มขนาดของ $|q|$ เป็นสองเท่า ความหนาแน่นประจุบนผิวของตัวนำทั้งสองจะเพิ่มเป็นสองเท่าทุก ๆ แห่ง การกระจายประจุใหม่นี้จะทำให้ทิศของ $\vec{E}$ ที่จุดต่าง ๆ เหมือนเดิม แต่ว่า $\vec{E}$ จะมีขนาดเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่าทุกแห่ง ดังนั้นจากสมการ $V \equiv V_{\text{บวก}} - V_{\text{ลบ}} = -\int_{\text{ลบ}}^{\text{บวก}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{\text{บวก}}^{\text{ลบ}} \vec{E}\cdot d\vec{s}$ จะเห็นได้ว่า V จะเพิ่มขึ้นเป็นสองเท่าด้วย ดังนั้น V และ $|q|$ แปรผันเป็นสัดส่วนกันโดยตรงไม่ว่ารูปทรงทางเรขาคณิตของตัวนำทั้งสองจะเป็นอย่างไร

$$|q| \propto V$$

ความสัมพันธ์ข้างบนมักเขียนเป็นรูปสมการว่า

$$|q| = CV$$

โดยที่ C เป็นค่าคงตัวขึ้นกับคุณสมบัติทางเรขาคณิตของระบบเท่านั้น (สมมุติว่าตอนนี้ตัวนำทั้งสองวางอยู่ในสุญญากาศ) เราเรียก C ว่า*ความจุไฟฟ้า*ของระบบซึ่งประกอบด้วยตัวนำทั้งสอง และเรียกตัวระบบเองว่า*ตัวเก็บประจุ*

จากความสัมพันธ์ข้างบน เราให้นิยามความจุไฟฟ้า C ของตัวเก็บประจุได้ว่า

$$C \equiv \frac{|q|}{V}$$

นั่นคือความจุไฟฟ้าของตัวเก็บประจุมีค่าเท่ากับขนาดของประจุ $|q|$ บนตัวนำตัวใดตัวหนึ่งหารด้วยขนาดของความต่างศักย์ V ระหว่างตัวนำทั้งสอง ในระบบ SI ความจุไฟฟ้ามีหน่วยเป็นคูลอมบ์ต่อโวลต์ $(\mathrm{C/V})$ ซึ่งมีชื่อเรียกอีกอย่างว่า ฟารัด (farad) ใช้สัญลักษณ์แทนว่า F

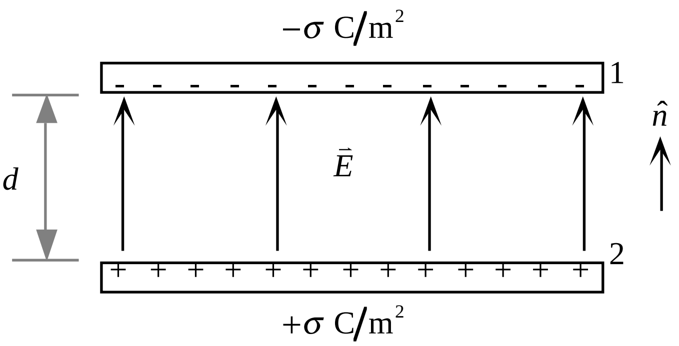
$$1\ \mathrm{F} \equiv 1\ \mathrm{C/V}$$

ขนาดของ C ที่ใช้กันบ่อย ๆ ในวงจรอิเล็กทรอนิกส์ต่าง ๆ มักมีค่าน้อยกว่า 1 farad มาก หน่วยที่ใช้กันบ่อยคือ microfarad $(\mu\mathrm{F})$ และ picofarad (pF) ซึ่งบางทีเรียกว่า micro-microfarad $(\mu\mu\mathrm{F})$

$$1\ \mu\mathrm{F} = 10^{-6}\,\mathrm{F}, \quad 1\ \mathrm{pF} = 10^{-12}\,\mathrm{F}$$

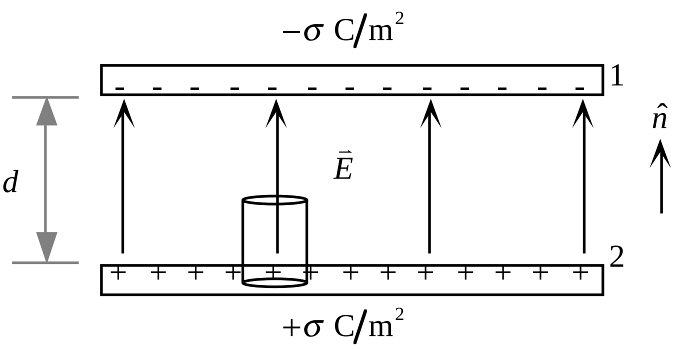
ตัวอย่าง ความจุไฟฟ้าของตัวเก็บประจุแบบแผ่นคู่ขนานขนาดใหญ่ในสุญญากาศ

เราหาความจุไฟฟ้าจากนิยาม ความจุไฟฟ้า $C = \dfrac{|q|}{V}$ ดังนั้นก่อนอื่นเราต้องทำให้ตัวเก็บประจุมีประจุไฟฟ้าซึ่งจะทำให้มีความต่างศักย์คร่อมตัวเก็นประจุเสียก่อน จึงจะหาความจุไฟฟ้าจากนิยามนี้ได้ เราสมมุติว่าเราย้ายประจุจากตัวนำหนึ่งไปยังอีกตัวนำหนึ่ง ทำให้ตัวนำทั้งสองมีประจุขนาด $|q|$ เท่ากันแต่มีเครื่องหมายตรงกันข้าม ประจุที่ต่างกันจะดูดกัน ทำให้ประจุเคลื่อนที่ไปอยู่ที่ผิวด้านในอย่างสม่ำเสมอ ให้บนตัวนำ 1 มีประจุลบกระจายอยู่ด้วยความหนาแน่น $-\sigma\ \mathrm{C/m^2}$ และบนตัวนำ 2 มีประจุบวกกระจายอยู่ด้วยความหนาแน่น $+\sigma\ \mathrm{C/m^2}$ ดังรูป สมมุติว่าระยะห่างระหว่างแผ่นทั้งสองเท่ากับ d



เมื่อมีประจุบนแผ่นตัวนำดังกล่าว จะมีความต่างศักย์ระหว่างตัวนำ เราหาความต่างศักย์นี้จาก $V \equiv V_{\text{บวก}} - V_{\text{ลบ}} = -\int_{\text{ลบ}}^{\text{บวก}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{บวก}}^{\text{ลบ}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ ซึ่งหมายความว่าเราต้องรู้ $\vec{E}$ ที่จุดต่าง ๆ ก่อน สนามไฟฟ้า $\vec{E}$ เป็นผลบวกของสนามไฟฟ้าเนื่องจากประจุบนตัวนำบวกและตัวนำลบ เราสามารถหาสนามไฟฟ้าระหว่างแผ่นตัวนำได้จากกฎของเกาส์ดังนี้

เนื่องจากเราสมมุติว่าแผ่นตัวนำมีขนาดใหญ่มากและขนานกัน จากความสมมาตรสนามไฟฟ้าจะมีทิศชี้ตรงจากแผ่นบวกไปหาแผ่นลบ เราเลือกผิวของเกาส์เป็นผิวทรงกระบอกตรงดังรูปข้างล่าง ให้ฝาด้านล่างอยู่ในเนื้อตัวนำประจุบวก ฝาด้านบนอยู่ในบริเวณระหว่างแผ่นตัวนำ ณ ตำแหน่งที่เราต้องการหาขนาดสนามไฟฟ้า



ประจุไฟฟ้าสุทธิภายในผิวของเกาส์มีค่าเท่ากับความหนาแน่นประจุที่ผิวตัวนำคูณกับพื้นที่ตัดขวาง ΔA ของทรงกระบอก

$$Q_{\text{ภายใน}} = \sigma \times \Delta A$$

ฟลักซ์ไฟฟ้าที่ทะลุผ่านผิวทรงกระบอกมีแต่ด้านบนเท่านั้น เพราะว่าผิวด้านล่างอยู่ในเนื้อตัวนำซึ่งสนามไฟฟ้า

มีค่าเป็นศูนย์ ส่วนผิวทรงกระบอกด้านข้างอยู่ในแนวดิ่งไม่มีสนามไฟฟ้าทะลุผ่าน ที่ผิวบนสนามไฟฟ้ามีทิศขนานกับเส้นแนวฉากกับฝาทรงกระบอก ดังนั้น

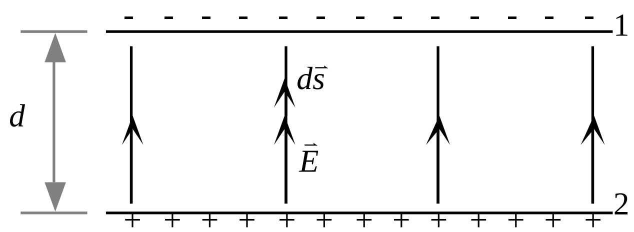
$$\text{ฟลักซ์สุทธิ } \Phi = E \times \Delta A$$

กฎของเกาส์ $\Phi = \dfrac{Q}{\varepsilon_0}$ จึงให้ว่า $\quad \Phi = E \times \Delta A = \dfrac{\sigma \times \Delta A}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

ดังนั้นเราสรุปว่า

สนามไฟฟ้าในระหว่างแผ่นคู่ขนานขนาดใหญ่มีทิศชี้จากแผ่นบวกไปหาแผ่นลบและมีขนาด $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}$

ในการคำนวณ $V \equiv V_{\text{บวก}} - V_{\text{ลบ}} = \int_{\text{บวก}}^{\text{ลบ}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ เราจะเลือกเส้นทางตั้งฉากกับแผ่นบวกตรงไปยังแผ่นลบขนานกับทิศของ $\vec{E}$ ระหว่างแผ่น



$$V \equiv V_{\text{บวก}} - V_{\text{ลบ}} = \int_{\text{บวก}}^{\text{ลบ}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\text{บวก}}^{\text{ลบ}} E\,|ds| == E \int_{\text{บวก}}^{\text{ลบ}} |ds| = E \times d$$

เพราะ $\int_{\text{บวก}}^{\text{ลบ}} |ds| = d$ เป็นระยะทางตั้งฉากระหว่างตัวนำทั้งสอง

ดังนั้น
$$V = E \times d = \frac{\sigma d}{\varepsilon_0}$$

ถ้า A เป็นพื้นที่ของแต่ละแผ่น ความหนาแน่นประจุไฟฟ้าต่อพื้นที่คือ $\sigma = \dfrac{|q|}{A}$ และดังนั้น

$$V = \frac{|q|\, d}{\varepsilon_0 A}$$

และจากนิยามของความจุไฟฟ้า $C = \dfrac{|q|}{V}$ เราจะได้ว่า

สำหรับตัวเก็บประจุแบบแผ่นคู่ขนานขนาดใหญ่ซึ่งมีตัวกลางระหว่างแผ่นเป็นสุญญากาศ

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}$$

จากตัวอย่างที่แล้ว เราเห็นว่าขั้นตอนการหาความจุไฟฟ้าของตัวเก็บประจุคือ

1. ให้ประจุขนาด $|q|$ เท่ากันแต่เครื่องหมายตรงกันข้ามกับตัวนำแต่ละชิ้นของตัวเก็บประจุ

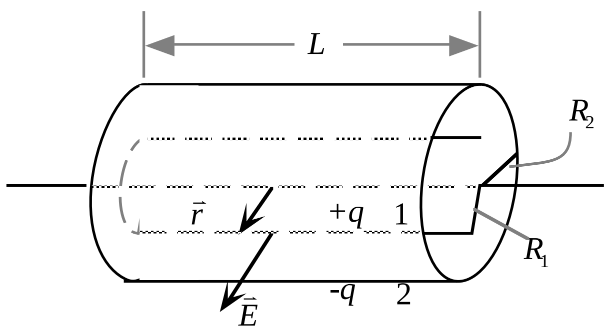
2. หาสนามไฟฟ้าระหว่างตัวนำสองชิ้นของตัวเก็บประจุ

3. คำนวณขนาดความต่างศักย์ระหว่างตัวนำทั้งสองจาก

$$V \equiv V_{\text{บวก}} - V_{\text{ลบ}} = \int_{\text{บวก}}^{\text{ลบ}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

4. หาค่าความจุไฟฟ้าจาก $C = \dfrac{|q|}{V}$

ตัวอย่าง จงหาความจุไฟฟ้าของตัวเก็บประจุที่เป็นตัวนำทรงกระบอกซ้อนกัน โดยที่แกนของทรงกระบอกทั้งสองทับอยู่บนเส้นตรงเดียวกัน ให้ทรงกระบอกในมีรัศมี R_1 และทรงกระบอกนอกมีรัศมี R_2 ทรงกระบอกทั้งสองยาว L เท่ากัน และความยาว L ยาวกว่ารัศมี R_1 และ R_2 มาก ๆ



สมมุติว่าเราเอาอิเล็กตรอนจากทรงกระบอกในไปไว้ที่ทรงกระบอกนอก ทำให้ทรงกระบอกนอกมีประจุ $-|q|$ และทรงกระบอกในมีประจุ $+|q|$ ประจุบนตัวนำทั้งสองจะกระจายกันอยู่อย่างสม่ำเสมอ ให้ความหนาแน่นต่อหนึ่งหน่วยความยาวขนาด $\lambda = |q|/L$ ในการจะหา C จาก $C = \frac{|q|}{V}$ เราจะหา V จาก $V \equiv V_{\text{บวก}} - V_{\text{ลบ}} = \int_{\text{บวก}}^{\text{ลบ}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$ ทำให้เราต้องหา $\vec{E}$ ระหว่างทรงกระบอกทั้งสองก่อน เราจะหา $\vec{E}$ จากกฎของเกาส์

เนื่องจากเราสมมุติว่าทรงกระบอกยาวมาก ปลายทั้งสองข้างของทรงกระบอกจึงไม่มีผล จากความสมมาตร สนามไฟฟ้า $\vec{E}$ จะมีทิศออกตามแนวรัศมีตั้งฉากกับแกนของทรงกระบอก ที่ระยะห่าง r จากแกนเท่ากัน $\vec{E}$ มีขนาดเท่ากัน ดังนั้นเราเลือกผิวของเกาส์ให้เป็นทรงกระบอกรัศมี r ยาว ℓ โดยที่แกนอยู่ที่เดียวกับแกนทรงกระบอกตัวนำ ที่ปลายสองข้างของผิวของเกาส์ปิดด้วยระนาบที่ตั้งฉากกับแกน ถ้า $r > R_2$ ประจุสุทธิที่อยู่ภายในผิวของเกาส์เป็นศูนย์ ดังนั้น $\vec{E}$ ที่ภายนอกรัศมี R_2 เป็นศูนย์ ถ้า $r < R_1$ ประจุสุทธิที่อยู่ภายในผิวของเกาส์ก็เป็นศูนย์เช่นกัน ทำให้ $\vec{E}$ ภายในบริเวณทรงกระบอกในเป็นศูนย์ด้วย ที่นี้พิจารณาบริเวณ $R_1 < r < R_2$ ประจุสุทธิที่อยู่ภายในผิวของเกาส์มีค่าเท่ากับ $\lambda\ell$ ฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านผิวของเกาส์มีเฉพาะที่ผ่านผิวโค้งทรงกระบอกเท่านั้น เพราะที่ปลายสองข้าง $\vec{E}$ ตั้งฉากกับทิศของ $d\vec{S}$ ทำให้ที่นี่ $\vec{E} \cdot d\vec{S} = 0$ ส่วนที่ผิวโค้งสนามไฟฟ้ามีทิศเดียวกับเส้นแนวฉากที่ผิว ทำให้ฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านผิวโค้งมีค่าเท่ากับ $E \times 2\pi r\ell$ จากกฎของเกาส์เราจะได้ว่า

$$E \times 2\pi r\ell = \frac{\lambda\ell}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}$$

เมื่อพิจารณาทิศของสนามไฟฟ้าด้วย เราจะได้ว่า ในบริเวณระหว่างทรงกระบอก

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\hat{r}$$

ดังนั้นความต่างศักย์ระหว่างทรงกระบอกใน $(+)$ กับทรงกระบอกนอก $(-)$ มีค่า

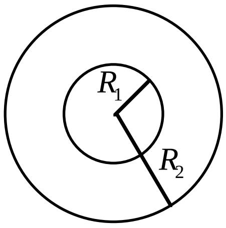
$$\begin{aligned} V = V_1 - V_2 &= \int_1^2 \vec{E}.d\vec{s} = \int_1^2 \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\hat{r}.d\vec{s} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}dr \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(R_2/R_1\right) = \frac{\left(|q|/L\right)}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(R_2/R_1\right) \end{aligned}$$

จาก $C = \frac{|q|}{V}$ เราจะได้ว่า $$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(R_2/R_1)}$$

จะเห็นได้ว่าค่าความจุไฟฟ้าขึ้นกับคุณสมบัติทางเราขาคณิต $(L,\ R_2,\ R_1)$ ของระบบเท่านั้น (ที่จริงขึ้นกับชนิดของตัวกลางที่ขั้นอยู่ระหว่างตัวนำด้วย - ในกรณีนี้คือสุญญากาศ)

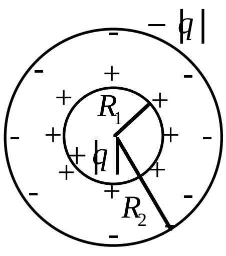
แบบฝึกหัด

จงหาความจุไฟฟ้าของระบบซึ่งประกอบด้วยทรงกลมตัวนำกลวงสองลูกซ้อนกันโดยมีจุดศูนย์กลางร่วมกัน กำหนดให้ทรงกลมทั้งสองอยู่ในสุญญากาศและมีรัศมี R_1 และ R_2 $(R_2 > R_1)$



วิธีคิด

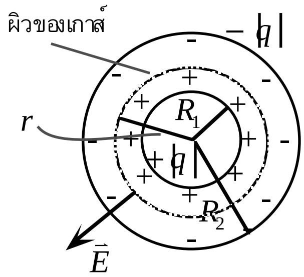
1. เลือกย้ายประจุ $-|q|$ จากทรงกลมในไปไว้ที่ทรงกลมนอก ทำให้ทรงกลมในมีประจุ $+|q|$ และทรงกลมนอกมีประจุ $-|q|$ ดังรูป



2. หาสนามไฟฟ้าระหว่างตัวนำทั้งสอง

จากความสมมาตร สนามไฟฟ้ามีทิศออกตามแนวรัศมีจากทรงกลมประจุบวกไปยังทรงกลมประจุลบ และที่ระยะห่างจากจุดศูนย์กลางเท่ากันจะมีขนาดเท่ากัน เราหาขนาดของสนามไฟฟ้าจากกฎ

ของเกาส์ เลือกผิวของเกาส์เป็นผิวทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางที่เดียวกับทรงกลมตัวนำ และมีรัศมี r ระหว่าง R_1 และ R_2



ฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านผิวของเกาส์ทรงกลมมีรัศมี r มีค่าเท่ากับ $4\pi r^2 \times E$ ส่วนประจุภายในผิวปิดมีค่าเท่ากับ $+|q|$ ดังนั้นกฎของเกาส์จะให้

$$4\pi r^2 \times E = \frac{|q|}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2}$$

3. คำนวณขนาดความต่างศักย์ระหว่างตัวนำทั้งสองจาก

$$V \equiv V_{\text{บวก}} - V_{\text{ลบ}} = \int_{\text{บวก}}^{\text{ลบ}} \vec{E}\cdot d\vec{s}$$

$$\begin{aligned}
V &= \int_{\text{บวก}}^{\text{ลบ}} \vec{E}\cdot d\vec{s} = \int_{\text{บวก}}^{\text{ลบ}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2}\hat{r}\cdot d\vec{s} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2}dr \\
&= \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2} = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right] \\
&= \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}
\end{aligned}$$

4. หาค่าความจุไฟฟ้าจาก $C = \dfrac{|q|}{V}$ จะได้ $C = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{R_1R_2}{R_2-R_1}$

เราอาจหาความจุไฟฟ้าของทรงกลมตัวนำได้ โดยพิจารณาให้ทรงกลมนอกมีขนาดใหญ่มาก ๆ นั่นคือให้ $R_2 \to \infty$ ทำให้ระบบตัวเก็บประจุนี้ดูเหมือนว่าประกอบด้วยทรงกลมตำนำโดด ๆ รัศมี R_1 เพียงชิ้นเดียวที่มีความจุไฟฟ้า

$$C = \lim_{R_2 \to \infty} 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = \lim_{R_2 \to \infty} 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2} = 4\pi\varepsilon_0 R_1$$

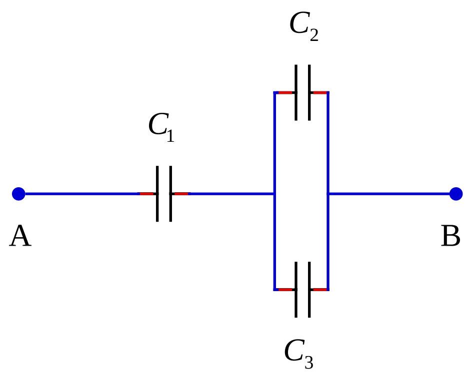
ดังนั้นความจุไฟฟ้าของทรงกลมตัวนำรัศมี ในสุญญากาศมีค่า $C = 4\pi\varepsilon_0 R$

ความจุไฟฟ้าสมมูล

ในวงจรไฟฟ้ามักมีการต่อตัวเก็บประจุไฟฟ้าเพื่อใช้งานแบบต่าง ๆ ในการเขียนรูปเพื่อแสดงการต่อตัวเก็บประจุไฟฟ้า เราใช้เส้นขนานคู่แทนตัวเก็บประจุ หรือบางครั้งก็แทนด้วยเส้นตรงเขียนคู่กับเส้นโค้ง ดังรูปข้างล่าง ถ้าตัวเก็บประจุเป็นแบบที่ปรับค่าความจุไฟฟ้าได้ ก็เขียนบอกด้วยลูกศรคร่อมเส้นขนานคู่

สัญลักษณ์แทนตัวเก็บประจุ

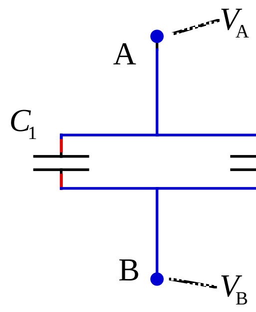
รูปข้างล่างแสดงการต่อตัวเก็บประจุแบบง่าย ๆ แบบหนึ่งระหว่างปลาย A และ B เราต่อตัวเก็บประจุด้วยลวดตัวนำซึ่งถือว่าไม่มีความจุหรือความต้านทาน



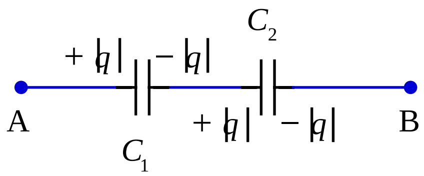
ในบางครั้งเราอาจต้องการแทนกลุ่มตัวเก็บประจุที่ต่อกันอยู่ด้วยตัวเก็บประจุโดดเพียงตัวเดียว ตัวเก็บประจุเดี่ยวที่มาแทนนี้จะต้องทำหน้าที่แทนกลุ่มตัวเก็บประจุเดิม แล้วให้ผลต่อวงจรภายนอกเหมือนเดิม นั่นคือจะต้องเก็บประจุได้เท่าเดิม และมีความต่างศักย์คร่อมขั้วเท่าเดิม เราเรียกตัวเก็บประจุเดี่ยวที่มาแทนที่นี้ว่า *ตัวเก็บประจุสมมูล* ความจุของตัวเก็บประจุสมมูลเรียกว่า*ความจุไฟฟ้าสมมูล*

เมื่อตัวเก็บประจุสองตัวต่อกันดังรูปข้างล่าง โดยให้ลวดตัวนำต่อแผ่นบนเข้าด้วยกันและดังนั้นทำให้มีศักย์ไฟฟ้า V_A ร่วมกัน และแผ่นล่างก็ต่อเข้าด้วยกันทำให้มีศักย์ไฟฟ้า V_B ร่วมกัน เราเรียกว่าตัวเก็บ

ประจุทั้งสองต่อกัน*แบบขนาน* เมื่อตัวเก็บประจุต่อกันแบบขนาน ความต่างศักย์คร่อมตัวเก็บประจุแต่ละตัวมีค่าเท่ากัน

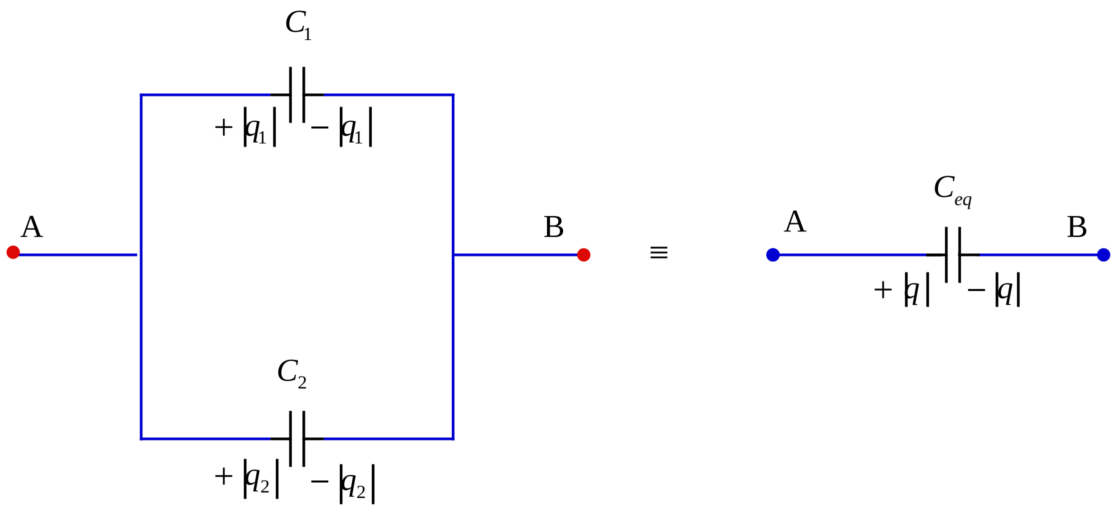


ในรูปข้างล่าง ตัวเก็บประจุสองตัวต่อกันในลักษณะที่ทำให้ขนาดของประจุบนตัวเก็บประจุทั้งสองมีค่าเท่ากัน ความต่างศักย์คร่อมปลายสองข้างของกลุ่มตัวเก็บประจุมีค่าเท่ากับผลบวกของความต่างศักย์คร่อมตัวเก็บประจุแต่ละตัว เราเรียกการต่อแบบนี้ว่าการต่อ*แบบอนุกรม*



ตัวเก็บประจุต่อแบบขนาน

รูปข้างล่างแสดงให้เห็นตัวเก็บประจุสองตัวต่อกันแบบขนาน เราอัดประจุให้กับตัวเก็บประจุโดยการต่อปลายสองข้างของชุดตัวเก็บประจุเข้ากับแบตเตอรี่หรืออุปกรณ์อื่น ทำให้ที่ปลาย A และ B มีศักย์ไฟฟ้า V_A และ V_B ตามลำดับ สมมุติว่าที่ปลาย A มีประจุ $+|q|$ และปลาย B มีประจุ $-|q|$



ให้ $V = V_A - V_B$ เป็นขนาดความต่างศักย์ระหว่างปลาย A และ B ถ้า C_1 และ C_2 เป็นความจุไฟฟ้าของตัวเก็บประจุทั้งสอง ขนาดประจุบนตัวเก็บประจุทั้งสองคือ

$$|q_1| = C_1 V \qquad \text{และ} \qquad |q_2| = C_2 V$$

ประจุที่สะสมไว้ทั้งหมดแต่ละข้างมีขนาดเท่ากับ

$$|q| = |q_1| + |q_2| = C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2)V$$

เมื่อแทนชุดตัวเก็บประจุด้วยตัวเก็บประจุสมมูลเพียงตัวเดียวซึ่งเก็บประจุรวมขนาดเท่ากันเมื่อต่อคร่อมความต่างศักย์เท่ากัน ความจุสมมูลต้องมีค่า

$$C_{eq} = \frac{|q|}{V} = \frac{(C_1 + C_2)V}{V} = C_1 + C_2$$

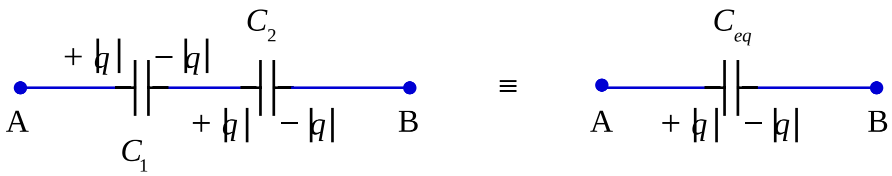
นั่นคือเมื่อเราต่อตัวเก็บประจุแบบขนาน ความจุสมมูลมีค่าเท่ากับผลบวกของความจุของแต่ละตัว เมื่อเราเอาตัวเก็บประจุที่สองมาต่อขนานกับตัวแรก ความจุจะมีค่าเพิ่มขึ้น เพราะเหมือนกับว่าเราเพิ่มพื้นที่ของตัวเก็บประจุ ทำให้เก็บประจุได้มากขึ้นที่ความต่างศักย์เท่าเดิม

ถ้ามีตัวเก็บประจุมาต่อกันแบบขนานมากกว่าสองตัว เราใช้เหตุผลอย่างเดียวกันแสดงให้เห็นได้ว่า

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots.$$

ตัวเก็บประจุต่อแบบอนุกรม

ตัวเก็บประจุในรูปข้างล่างต่อกันแบบอนุกรม เราอัดประจุให้กับตัวเก็บประจุโดยการต่อปลายสองข้างของชุดตัวเก็บประจุเข้ากับแบตเตอรี่หรืออุปกรณ์อื่น ทำให้ที่ปลาย A และ B มีศักย์ไฟฟ้า V_A และ V_B ตามลำดับ สมมุติว่าที่ปลายด้าน A มีประจุ $+|q|$ และปลายด้าน B มีประจุ $-|q|$



ความต่างศักย์ระหว่าง A และ B มีค่าเท่ากับผลบวกของความต่างศักย์คร่อมตัวเก็บประจุทั้งสอง

$$V = V_1 + V_2$$

จาก $|q| = CV$ เราเขียนสมการข้างบนได้ใหม่

$$\frac{|q|}{C_{eq}} = \frac{|q_1|}{C_1} + \frac{|q_2|}{C_2} = \frac{|q|}{C_1} + \frac{|q|}{C_2}$$

ดังนั้น
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

หรือ
$$C_{eq} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$

ถ้ามีตัวเก็บประจุมาต่อกันแบบอนุกรมมากกว่าสองตัว เราใช้เหตุผลอย่างเดียวกันแสดงให้เห็นได้ว่า

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + ...$$

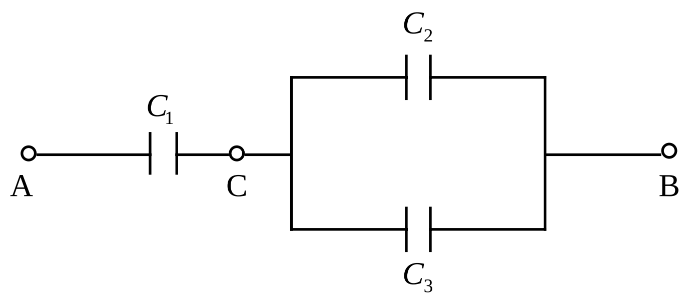
การต่อตัวเก็บประจุแบบทั่วไป

การต่อประจุแบบทั่วไปอาจแบ่งออกได้เป็นสองประเภทใหญ่ ๆ คือ

1. แบบที่สามารถ"ยุบ"เป็นการต่อแบบอนุกรมและขนานผสมกัน
2. แบบอื่นที่<u>ไม่</u>สามารถ"ยุบ"เป็นการต่อแบบอนุกรมและขนานผสมกันได้

ตัวอย่าง การต่อชุดตัวเก็บประจุแบบที่สามารถยุบเป็นแบบอนุกรมและขนานได้

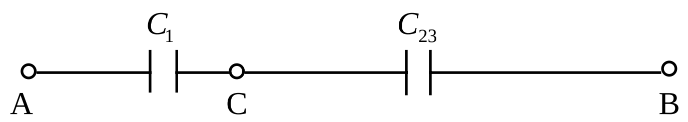
พิจารณาการต่อชุดตัวเก็บประจุในรูปข้างล่าง



เราสามารถมองได้ว่าตัวเก็บประจุ C_2 และ C_3 ต่อกันแบบขนาน ซึ่งให้ความจุไฟฟ้าสมมูลระหว่างจุด C และ B เป็น C_{23} โดยที่

$$C_{23} = C_2 + C_3$$

หลังจากนั้นเราแทนชุดตัวเก็บประจุระหว่างจุด C และ B ด้วยตัวเก็บประจุสมมูล C_{23} นี้ ชุดตัวเก็บประจุเดิมจึงมีค่าเทียบเท่ากับชุดตัวเก็บประจุในรูปข้างล่าง



ตัวเก็บประจุ C_1 และ C_{23} ต่อกันแบบอนุกรม ดังนั้น

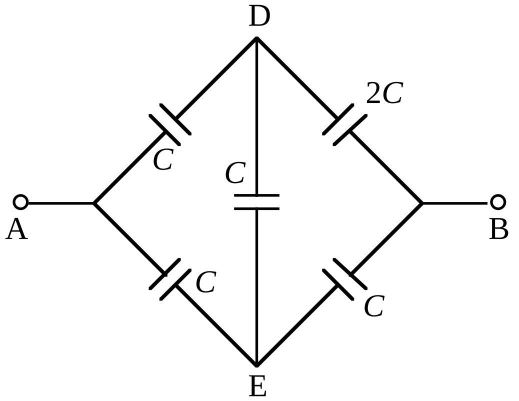
$$C_{eq} = \frac{C_1 C_{23}}{C_1 + C_{23}}$$

เมื่อแทนค่า C_{23} จากข้างบน เราจะได้ความจุไฟฟ้าสมมูลระหว่างจุด A และ B เป็น

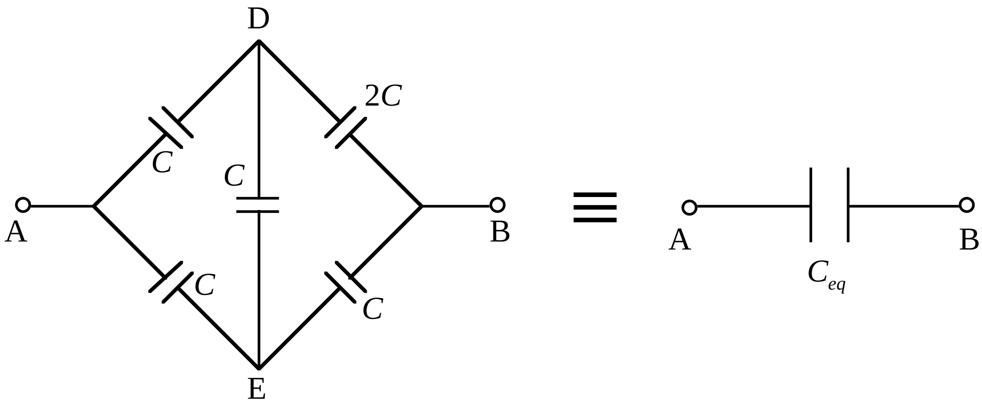
$$C_{eq} = \frac{C_1\left(C_2 + C_3\right)}{C_1 + C_2 + C_3} = \frac{C_1 C_2 + C_1 C_3}{C_1 + C_2 + C_3}$$

ตัวอย่าง การต่อชุดตัวเก็บประจุแบบที่ไม่สามารถยุบเป็นแบบอนุกรมและขนานได้

พิจารณาชุดตัวเก็บประจุที่ต่อกันดังรูปข้างล่าง

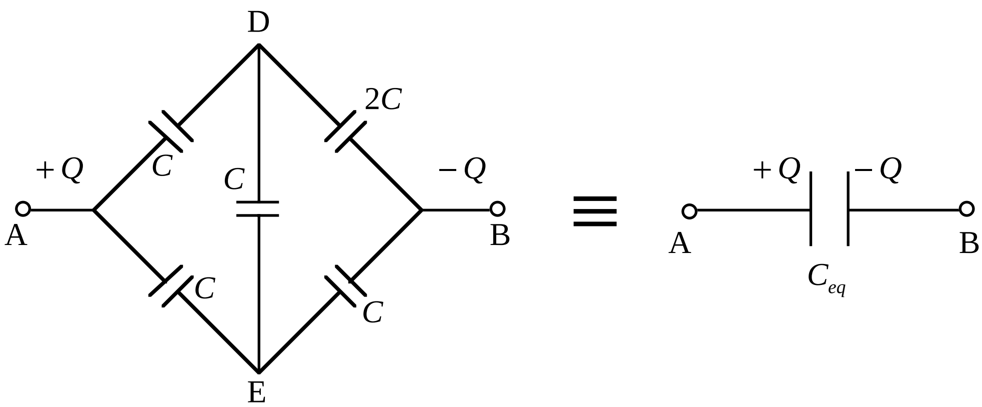


เราไม่สามารถยุบตัวเก็บประจุชุดนี้โดยมองว่าเป็นการต่อแบบอนุกรมและ/หรือขนานกันได้ เราจะต้องใช้หลักพื้นฐานพิจารณา นั่นคือ ถ้าเราแทนชุดประจุนี้ด้วยความจุไฟฟ้าสมมูลระหว่างจุดจุด A และ B เราจะต้องได้ผลภายนอกวงจรเหมือนเดิม

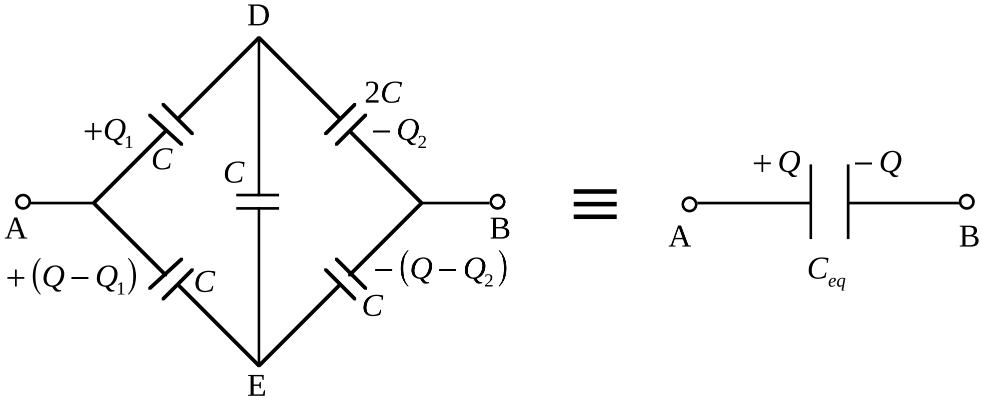


1. ประจุไฟฟ้า เมื่อมองเข้าจากปลาย A หรือ B จะต้องเห็นเหมือนกัน

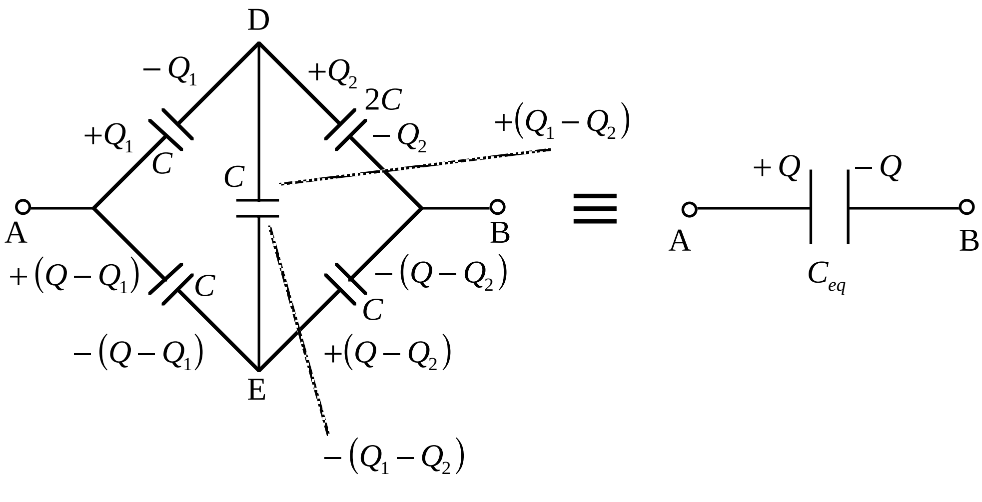
สมมุติว่าเมื่อมองเข้าจากปลาย A เห็นประจุทั้งหมด $+Q$ ที่ปลาย B จะต้องเห็นประจุทั้งหมด $-Q$ ทั้งนี้เป็นไปตามนิยามของตัวเก็บประจุที่สองขั้วต้องมีประจุขนาดเท่ากันแต่เครื่องหมายตรงข้าม



ในชุดตัวเก็บประจุเดิม ประจุจะกระจายไปยังตัวเก็บประจุต่าง ๆ แต่ไม่ว่าจะกระจายอย่างไรก็ตาม การกระจายประจุต้องสอดคล้องกับกฎการคงตัวของประจุด้วย ดังนั้นถ้าให้ Q_1 และ Q_2 เป็นขนาดของประจุบนตัวเก็บประจุด้านบนดังในรูปข้างล่าง ขนาดประจุบนตัวเก็บประจุด้านล่างต้องเป็น $Q-Q_1$ และ $Q-Q_2$ ตามลำดับ ดูรูปข้างล่าง



ประจุบนแผ่นตัวเก็บประจุด้านหนึ่งจะเหนี่ยวนำประจุเครื่องหมายตรงข้ามอีกด้านหนึ่ง ทำให้ประจุกระจายดังในรูปข้างล่าง



2. ความต่างศักย์คร่อมจุด A และ B จะต้องเห็นเหมือนกันไม่ว่าจะมองตามเส้นทางใดระหว่างจุด A และ B

ความต่างศักย์ตามเส้นทาง $\mathrm{A} \to \mathrm{D} \to \mathrm{B}$ ต้องเท่ากับตามเส้นทาง $\mathrm{A} \to \mathrm{E} \to \mathrm{B}$ ดังนั้นจาก $V = |q|/C$ เราจะได้ว่า

$$\frac{Q_1}{C}+\frac{Q_2}{2C}=\frac{(Q-Q_1)}{C}+\frac{(Q-Q_2)}{C}$$

หรือ $$2Q_1+Q_2=2(Q-Q_1)+2(Q-Q_2) \quad \Rightarrow \quad 4Q-4Q_1-3Q_2=0 \qquad (1)$$

ในทำนองเดียวกัน ความต่างศักย์ตามเส้นทาง $\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{D}\rightarrow\mathrm{B}$ ต้องเท่ากับตามเส้นทาง $\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{D}\rightarrow\mathrm{E}\rightarrow\mathrm{B}$ ดังนั้น

$$\frac{Q_1}{C}+\frac{Q_2}{2C}=\frac{Q_1}{C}+\frac{(Q_1-Q_2)}{C}+\frac{(Q-Q_2)}{C}$$

หรือ $$Q_2=2(Q_1-Q_2)+2(Q-Q_2)\Rightarrow 2Q+2Q_1-5Q_2=0 \qquad (2)$$

แก้สมการ (1) และ (2) พร้อมกัน จะให้

$$Q_1=\frac{7Q}{13}, \quad Q_2=\frac{8Q}{13}$$

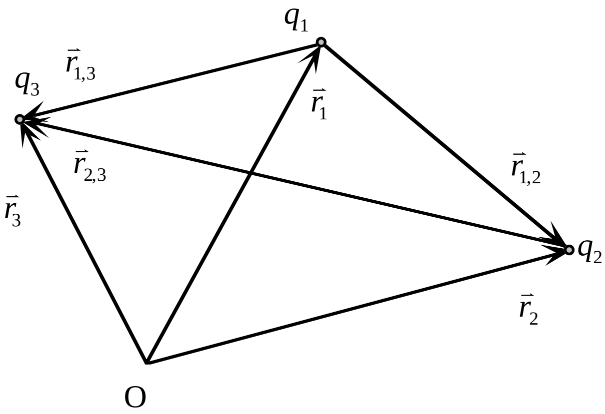
แทนค่า Q_1 และ Q_2 ลงในค่าความต่างศักย์ระหว่าง ตามเส้นทาง $\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{D}\rightarrow\mathrm{B}$ ข้างบน เราจะได้

ขนาดความต่างศักย์ $V=V_\mathrm{A}-V_\mathrm{B}=\dfrac{Q_1}{C}+\dfrac{Q_2}{2C}=\dfrac{7Q}{13C}+\dfrac{8Q}{26C}=\dfrac{11Q}{13C}$

ดังนั้นความจุไฟฟ้าสมมูลที่ต้องการคือ $C_{eq}=\dfrac{Q}{V}=\dfrac{13}{11}C$

พลังงานไฟฟ้าสถิตของกลุ่มประจุไฟฟ้า

เมื่อเรานำประจุจากที่ไกล ๆ มาวางใกล้กัน เราต้องทำงานต้านกับแรงไฟฟ้าที่พยายามผลักประจุออกจากกัน เราสามารถมองได้ว่างานที่เราทำนี้สะสมอยู่ในรูปพลังงานศักย์ในสนามไฟฟ้า เราจะเขียนพลังงานศักย์นี้ในรูปของประจุไฟฟ้าและศักย์ไฟฟ้า สมมุติว่าเราต้องการนำประจุไฟฟ้า q_1, q_2, q_3 สามประจุจากที่ไกล ๆ มาไว้ยังตำแหน่ง $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ ใกล้กันดังรูปข้างล่าง



เราจะนำประจุใดมาก่อนก็ได้ สมมุติว่าเรานำประจุ q_1 มาไว้ที่ตำแหน่ง $\vec{r}_1$ ก่อน เนื่องจากเดิมไม่มีประจุใดในบริเวณนี้เลย เราไม่ต้องออกแรงต้านแรงไฟฟ้าใด ๆ และดังนั้นไม่ต้องทำงานในการพาประจุแรกมา

$$W_1 = 0$$

ศักย์ไฟฟ้า ณ ตำแหน่งที่ห่าง $r_{1,2}$ จากประจุ q_1 มีศักย์ไฟฟ้า

$$V_{1,2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{1,2}}$$

ในการพาประจุ q_2 จากที่ไกล ๆ มาไว้ที่ระยะ $r_{1,2}$ จากประจุ q_1 เราต้องทำงานอย่างน้อย

$$W_2 = q_2 V_{1,2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{1,2}}$$

ในการพาประจุที่สามเข้ามา เราต้องทำงานต้านกับสนามไฟฟ้าเนื่องจากประจุ q_1 และ q_2 งานน้อยที่สุดที่จำเป็นต้องทำในการพาประจุ q_3 มาไว้ ณ ตำแหน่งที่ระยะห่าง $r_{1,3}$ จากประจุ q_1 และระยะห่าง $r_{2,3}$ จากประจุ q_2 คือ

$$W_3 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{1,3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{r_{2,3}}$$

งานน้อยที่สุดที่จำเป็นต้องทำในการนำประจุทั้งหมดเข้ามามีค่าเท่ากับพลังงานศักย์ไฟฟ้า U ของระบบสามประจุ

$$U = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{1,2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{1,3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{r_{2,3}}$$

เราสามารถเขียนสองพจน์แรกทางขวามือของสมการข้างบนได้ว่า

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{1,2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{1,3}} = q_1\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{1,2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{r_{1,3}}\right) = q_1V_1$$

โดยที่ V_1 คือศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากจากประจุอื่นที่ไม่ใช่ประจุ q_1 (ในที่นี้คือประจุ q_2 และ q_3)

ในทำนองเดียวกันผลบวกของสองพจน์หลังก็มีค่าเท่ากับ q_3 คูณกับศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากประจุ q_1 และ q_2 และผลบวกของพจน์แรกและพจน์สุดท้ายคือประจุ q_2 คูณกับศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากประจุ q_1 และ q_3

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{1,3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{r_{2,3}} = q_3\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{1,3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2}{r_{2,3}}\right) = q_3V_1$$

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{1,2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{r_{2,3}} = q_2\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1}{r_{1,2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_3}{r_{2,3}}\right) = q_1V_1$$

ดังนั้นเราเขียนสมการสำหรับพลังงานศักย์ไฟฟ้าของระบบเสียใหม่ได้ว่า

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{1,2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{1,3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{r_{2,3}} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{1,2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{1,2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{1,3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{1,3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{r_{2,3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{r_{2,3}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{1,2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{1,3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_3}{r_{1,3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{r_{2,3}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1q_2}{r_{1,2}} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_2q_3}{r_{2,3}}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(q_1V_1 + q_3V_3 + q_2V_2\right) = \frac{1}{2}\left(q_1V_1 + q_2V_2 + q_3V_3\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} q_iV_i
\end{aligned}$$

ในกรณีทั่วไป พลังงานศักย์ไฟฟ้าสถิตเนื่องจากระบบที่ประกอบด้วยจุดประจุไฟฟ้า n ประจุมีค่า

$$U = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} q_i V_i$$

โดยที่ V_i เป็นศักย์ไฟฟ้า ณ ตำแหน่งของประจุ q_i เนื่องจากประจุอื่นทั้งหมด

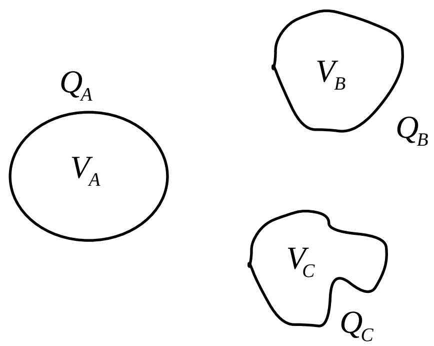
ความสัมพันธ์ข้างบนนี้ยังใช้ได้กับประจุที่กระจายอยู่บนผิวตัวนำหลาย ๆ ชิ้น ทั้งนี้เพราะว่าประจุที่อยู่บนตัวนำเดียวกันมีศักย์ไฟฟ้าเท่ากัน เราเพียงแต่รวบรวมประจุบนตัวนำแต่ละตัวทางขวามือของสมการบนเขียนใหม่เป็นพจน์ในรูปของประจุทั้งหมดบนตัวนำคูณกับศักย์ไฟฟ้าของตัวนำนั้น เช่น ถ้า q_1, q_2, q_3, q_4 เป็นประจุบนตัวนำ A ที่มีศักย์ไฟฟ้า V_A เท่ากัน เราเขียน $\frac{1}{2}q_1V_1 + \frac{1}{2}q_2V_2 + \frac{1}{2}q_3V_3 + \frac{1}{2}q_4V_4$ ในสมการบนได้ใหม่ว่า

$$\frac{1}{2}q_1V_1 + \frac{1}{2}q_2V_2 + \frac{1}{2}q_3V_3 + \frac{1}{2}q_4V_4 = \frac{1}{2}(q_1 + q_2 + q_3 + q_4)V_A = \frac{1}{2}Q_AV_A$$

ดังนั้นถ้าเรามีตัวนำประจุ N ตัว เราเขียนพลังงานศักย์ไฟฟ้าสถิตของกลุ่มประจุที่กระจายได้ว่า

$$U = \frac{1}{2}\sum_{A=1}^{N} Q_A V_A$$

โดยที่ Q_A คือประจุทั้งหมดบนตัวนำ A และ V_A คือศักย์ไฟฟ้าของตัวนำนั้น



การกระจายประจุบนตัวนำหลายตัว

หมายเหตุ ในกรณีทั้งหมดที่เราพิจารณานี้ เราตกลงให้พลังงานศักย์ไฟฟ้ามีค่าเป็นศูนย์เมื่อประจุอยู่ห่างกันมาก ๆ ที่อนันต์หรือเมื่อตัวนำทั้งหมดไม่มีประจุ พลังงานศักย์ที่เราคำนวณมานี้เป็นพลังงานศักย์

ไฟฟ้าที่สะสมอยู่ในระบบเนื่องจากตำแหน่งและแรงไฟฟ้าสถิตระหว่างประจุภายในระบบ ไม่ใช่พลังงานศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากแรงไฟฟ้าจากภายนอกระบบ พลังงานศักย์ไฟฟ้าของประจุ Q ในสนามไฟฟ้าจากประจุภายนอกระบบมีค่าเท่ากับ QV ไม่ใช่ $\frac{1}{2}QV$

สำหรับระบบตัวนำสองตัวที่มีประจุขนาดเท่ากันแต่เครื่องหมายตรงกันข้าม เราจะได้ว่า

$$U = \frac{1}{2}\left(+|q|V_+ - |q|V_-\right) = \frac{1}{2}|q|\left(V_+ - V_-\right) = \frac{1}{2}|q|V$$

ถ้าเรามองว่าตัวนำสองตัวนี้เป็นตัวเก็บประจุไฟฟ้าและใช้นิยามของความจุไฟฟ้า $C = \frac{|q|}{V}$ เราสามารถเขียนพลังงานศักย์ไฟฟ้าของตัวเก็บประจุได้ว่า

$$U = \frac{1}{2}|q|V = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}\frac{|q|^2}{C} \qquad \text{สำหรับตัวเก็บประจุไฟฟ้า}$$

พลังงานไฟฟ้าสถิตในตัวเก็บประจุ

ในการอัดประจุไฟฟ้าให้กับตัวเก็บประจุ โดยทั่วไปเราย้ายประจุลบจากตัวนำบวกไปไว้ที่ตัวนำลบ (หรือย้ายประจุบวกจากตัวนำลบไปไว้ที่ตัวนำบวก) เราต้องทำงานต้านกับแรงไฟฟ้าเพื่ออัดประจุนี้ งานที่ทำเก็บสะสมอยู่ในรูปพลังงานศักย์ไฟฟ้าเช่นกับในกรณีที่เราย้ายประจุจากที่ไกล ๆ มายังตัวนำ ไม่ว่าเราจะอัดประจุให้กับตัวเก็บประจุด้วยวิธีใด พลังงานศักย์ไฟฟ้าที่สะสมในตัวเก็บประจุจะมีค่าเท่ากัน เราจะแสดงให้เห็นว่าพลังงานที่สะสมในกรณีนี้มีค่าเท่ากับในหัวข้อที่แล้ว

สมมุติว่า ณ เวลาขณะหนึ่งตัวนำมีประจุขนาดเท่ากันเท่ากับ $|q'|$ แต่มีเครื่องหมายตรงกันข้าม ให้ V เป็นค่าความต่างศักย์ไฟฟ้าที่ตัวนำบวกมีค่าสูงกว่าตัวนำลบ ทีนี้ให้เรานำประจุขนาด $d|q|$ เล็ก ๆ จากตัวนำลบไปยังตัวนำบวก ทำให้ประจุ $d|q'|$ มีความต่างศักย์เพิ่ม V พลังงานศักย์ของประจุจะเพิ่มขึ้น

$$dU = Vd|q'| = \frac{|q'|}{C}d|q'|$$

พลังงานศักย์ไฟฟ้าทั้งหมดในตัวเก็บประจุมีค่าเท่ากับผลบวกของพลังงานศักย์ไฟฟ้าที่เพิ่มขึ้นทีละน้อยตั้งแต่เริ่มอัดประจุจากศูนย์จนกระทั่งมีค่า $|q|$

$$U=\int dU=\int_0^{|q|}\frac{|q'|}{C}d|q'|=\frac{1}{2}\frac{|q'|^2}{C}\bigg|_0^{|q|}=\frac{1}{2}\frac{|q|^2}{C}$$

พลังงานสนามไฟฟ้าสถิต

ในกระบวนการอัดประจุไฟฟ้าให้กับตัวเก็บประจุไฟฟ้า มีสนามไฟฟ้าเกิดขึ้นระหว่างตัวนำของตัวเก็บประจุ เราอาจมองได้ว่างานที่จำเป็นในการอัดประจุคืองานที่จำเป็นในการสร้างสนามไฟฟ้า นั่นคือเราสามารถมองได้ว่าพลังงานที่สะสมในตัวเก็บประจุนั้นเก็บอยู่ในสนามไฟฟ้า เราเรียกพลังงานนี้ว่า*พลังงานสนามไฟฟ้าสถิต*

พิจารณาตัวเก็บประจุไฟฟ้าแบบแผ่นคู่ขนาน เราจะเขียนพลังงานที่สะสมในตัวเก็บประจุในรูปของสนามไฟฟ้าระหว่างแผ่นคู่ขนาน เรารู้ว่าความสัมพันธ์ระหว่างขนาดสนามไฟฟ้า E กับขนาดความต่างศักย์ V และระยะห่าง d ระหว่างแผ่นคู่ขนานคือ

$$E=\frac{V}{d} \qquad \text{หรือ} \qquad V=Ed$$

แทนค่า $V=Ed$ และค่าความจุไฟฟ้า $C=\frac{\varepsilon_0 A}{d}$ ของตัวเก็บประจุแบบแผ่นคู่ขนานลงในค่าของพลังงานศักย์ไฟฟ้า เราจะได้ว่า

$$U=\frac{1}{2}\frac{|q|^2}{C}=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_0 A}{d}\right)(Ed)^2=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(Ad)$$

ปริมาณ Ad คือปริมาตรของที่ว่างระหว่างแผ่นคู่ขนานที่มีสนามไฟฟ้าอยู่ เราให้นิยามความหนาแน่นพลังงาน ρ_E ว่าคือพลังงานต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร ความหนาแน่นพลังงานในสนามไฟฟ้าระหว่างแผ่นคู่ขนานจึงมีค่า

$$\rho_E=\frac{\text{พลังงาน}}{\text{ปริมาตร}}=\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$$

นั่นคือพลังงานต่อหนึ่งหน่วยปริมาตรของสนามไฟฟ้าสถิตมีค่าแปรผันตรงกับกำลังสองของขนาดสนามไฟฟ้า แม้ว่าเราจะได้ความสัมพันธ์ข้างบนนี้มาจากสนามไฟฟ้าระหว่างแผ่นคู่ขนานของตัวเก็บประจุ แต่ว่าความ

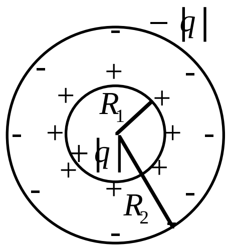
สัมพันธ์นี้เป็นจริงกับทุกสนามไฟฟ้า ที่ใดก็ตามที่มีสนามไฟฟ้า ความหนาแน่นพลังงานไฟฟ้าสถิต ณ ตำแหน่งใด ๆ หาได้จาก $\rho_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$ พลังงานไฟฟ้าสถิตในปริมาตรหนึ่ง ๆ สามารถหาได้โดยหาพลังงานไฟฟ้าสถิต dU ในปริมาตร $d\tau$ เล็ก ๆ

$$dU = \rho_E d\tau = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau$$

แล้วบวกพลังงานไฟฟ้าสถิตในปริมาตรเล็ก ๆ ทั้งหมดเข้าด้วยกัน E คือสนามไฟฟ้า ณ ตำแหน่งของปริมาตร $d\tau$

$$U = \int_{\text{ทั้งปริมาตร}} dU = \int_{\text{ทั้งปริมาตร}} \rho_E d\tau = \int_{\text{ทั้งปริมาตร}} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau$$

ตัวอย่าง จงหาพลังงานศักย์ไฟฟ้าทั้งหมดของระบบที่ประกอบด้วยทรงกลมตัวนำกลวงรัศมี R_1 และ R_2 ซ้อนกันอยู่ในสุญญากาศ $(R_2 > R_1)$ โดยที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกัน ทรงกลมในมีประจุ $+|q|$ ทรงกลมนอกมีประจุ $-|q|$



วิธีที่ 1 สำหรับระบบตัวนำสองตัวที่มีประจุขนาดเท่ากันแต่เครื่องหมายตรงกันข้าม เรารู้ว่า

$$U = \frac{1}{2}\left(+|q|V_+ - |q|V_-\right) = \frac{1}{2}|q|\left(V_+ - V_-\right) = \frac{1}{2}|q|V$$

เราเคยรู้ด้วยว่า ขนาดความต่างศักย์ระหว่างตัวนำมีค่า

$$V = \frac{|q|}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

ดังนั้น
$$U = \frac{|q|^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}\right)$$

วิธีที่ 2 เราคำนวณจาก

$$U = \int_{\text{ทั้งปริมาตร}} dU = \int_{\text{ทั้งปริมาตร}} \rho_E d\tau = \int_{\text{ทั้งปริมาตร}} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau$$

สนามไฟฟ้าภายในทรงกลมในและนอกทรงกลมนอกมีค่าเป็นศูนย์ เราพิสูจน์ได้ดังนี้ เลือกผิวซองเกาส์ให้เป็นผิวทรงกลมที่มีจุดศูนย์กลางร่วมกับทรงกลมตัวนำทั้งสองและให้มีรัศมีน้อยกว่าทรงกลมใน ฟลักซ์ไฟฟ้าที่ผ่านผิวทรงกลมนี้มีค่าเป็นศูนย์เพราะประจุไฟฟ้าภายในผิวของเกาส์เท่ากับศูนย์ ดังนั้นสนามไฟฟ้าจึงเป็นศูนย์ ในทำนองเดียวกันเราพิสูจน์ได้ว่าสนามไฟฟ้าภายนอกทรงกลมใหญ่ก็เป็นศูนย์ด้วยเพราะประจุสุทธิภายในผิวของเกาส์ซึ่งเป็นทรงกลมที่คลุมทรงกลมนอกมีค่าเท่ากับศูนย์ สนามไฟฟ้าในบริเวณระหว่างทรงกลมทั้งสองมีค่า

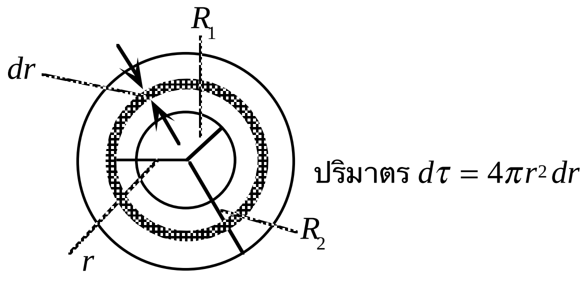
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2}\hat{r}$$

โดยที่ r เป็นระยะห่างจากจุดศูนย์กลาง และ $\hat{r}$ ชี้ออกตามแนวรัศมี ฉะนั้น

$$\rho_E = 0 \text{ เมื่อ } r < R_1 \text{ และเมื่อ } r > R_2$$

และ
$$\rho_E = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \times \frac{1}{16\pi^2\varepsilon_0^2} \times \frac{|q|^2}{r^4} = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0} \times \frac{|q|^2}{r^4} \qquad \text{เมื่อ } R_1 \le r \le R_2$$

เราเลือกปริมาตร $d\tau$ ที่จะใช้หาพลังงาน dU ให้เป็นปริมาตรระหว่างชั้นทรงกลมรัศมี r และ $r + dr$



เราประมาณว่าที่ทุกๆ จุดในนี้มี ρ_E เท่ากันหมด ดังนั้น

$$dU = \rho_E d\tau = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 d\tau = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{|q|^2}{r^4}\times 4\pi r^2 dr$$
$$= \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{|q|^2}{r^2}dr$$

และ $$U = \int_{\text{ทั้งปริมาตร}} dU = \int_{R_1}^{R_2}\frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{|q|^2}{r^2}dr = \frac{|q|^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) = \frac{|q|^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_2-R_1}{R_1R_2}\right)$$

จากค่า U นี้เราสามารถหาความจุไฟฟ้าของระบบนี้ได้จาก

$$U = \frac{1}{2}\frac{|q|^2}{C} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{2}\frac{|q|^2}{U}$$

ดังนั้น $$C = 4\pi\varepsilon_0\left(\frac{R_1R_2}{R_2-R_1}\right)$$

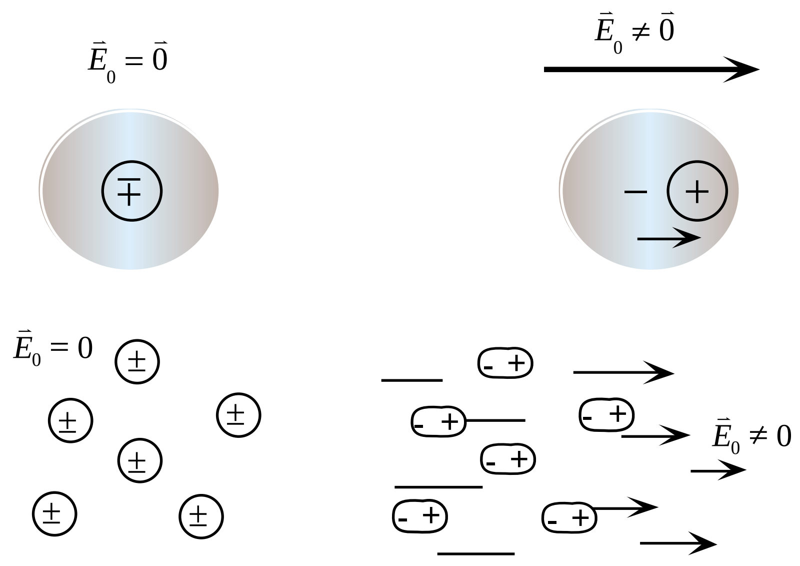
เหมือนกับที่เคยคำนวณโดยตรง

ไดอิเล็กตริก

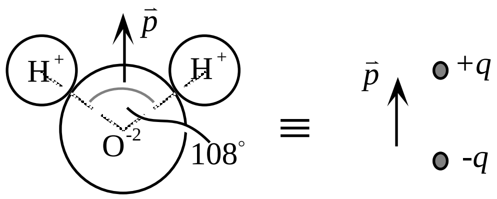
ในทางปฏิบัติตัวเก็บประจุส่วนมากแทบจะไม่มีเลยที่มีช่องว่างระหว่างตัวนำเป็นสุญญากาศหรืออากาศ แต่จะมีสารที่เป็นฉนวนไฟฟ้ากั้นอยู่ สารพวกนี้มีชื่อเรียกว่า ไดอิเล็กตริก (dielectric) เป็นฉนวนไฟฟ้าที่โมเลกุลถูกเหนี่ยวนำให้แยกขั้วได้ เหตุผลใหญ่ที่ทำเช่นนี้ก็เพราะว่าการมีไดอิเล็กตริกคั่นอยู่ทำให้ความจุไฟฟ้ามีค่าเพิ่มขึ้น นอกจากนั้นยังเป็นการทำให้ตัวเก็บประจุคงรูปอยู่ได้โดยที่ตัวนำไม่แตะกัน การที่จะเข้าใจว่าไดอิเล็กตริกเพิ่มความจุไฟฟ้าของตัวเก็บประจุได้อย่างไร เราต้องดูว่าเกิดอะไรขึ้นบ้างเมื่อไดอิเล็กตริกอยู่ในสนามไฟฟ้าจากภายนอก เราได้เคยพูดเกี่ยวกับตัวนำไฟฟ้าไปแล้วว่าเป็นสารที่มีประจุที่สามารถเคลื่อนได้อย่างเสรีตลอดเนื้อสารนั้น ในทางปฏิบัติก็คืออิเล็กตรอนจำนวนมาก (หนึ่งหรือสองอิเล็กตรอนต่ออะตอมในโลหะทั่วๆ ไป) ไม่ได้ถูกยึดไว้กับนิวเคลียสใดเป็นพิเศษ แต่สามารถเคลื่อนที่ได้สะดวก ในทางตรงกันข้ามในไดอิเล็กตริกประจุทุกประจุถูกยึดติดไว้กับอะตอมหรือโมเลกุลใดโมเลกุลหนึ่ง ประจุอาจจะเคลื่อนที่ภายในโมเลกุลได้ แต่ไม่สามารถหลุดออกไปจากโมเลกุลได้ การกระจัดขนาดเล็ก ๆ แบบนี้อาจจะไม่มีผลใหญ่เหมือนกับการเปลี่ยนรูปการกระจายประจุในตัวนำ แต่ผลสะสมของการกระจัดของประจุจำนวนมากทำให้เกิดลักษณะเฉพาะตัวของสารไดอิเล็กตริก วิธีการหลัก ๆ ที่สนามไฟฟ้าสามารถเปลี่ยนแปลงการแจกแจงประจุของอะตอมหรือโมเลกุลในไดอิเล็กตริกมีสองอย่างคือ การยืดและการหมุน

ขั้วคู่ไฟฟ้าเหนี่ยวนำ

ในกรณีแรกไม่มีขั้วคู่ไฟฟ้าถาวรในสารไดอิเล็กตริก นั่นคือถ้าไม่มีสนามไฟฟ้าจากภายนอกจะไม่มีขั้วคู่ไฟฟ้า นี่หมายความว่าขณะที่ไม่มีสนามไฟฟ้าจากภายนอก ตำแหน่งเฉลี่ยของประจุบวก (นิวเคลียส) และตำแหน่งเฉลี่ยของประจุลบ (อิเล็กตรอน) อยู่ที่แห่งเดียวกัน เมื่อมีสนามไฟฟ้า $\vec{E}_0$ จากภายนอกการทำต่อไดอิเล็กตริก ประจุบวกจะถูกดันไปในทิศของสนามไฟฟ้าและประจุลบจะถูกดันไปในทิศตรงข้าม ตามทฤษฎีแล้วถ้าสนามไฟฟ้ามีขนาดใหญ่มาก มันสามารถดึงประจุออกไปจากอะตอมหรือโมเลกุลได้ (ทำให้สารนั้นกลายเป็นตัวนำไป) สำหรับสนามไฟฟ้าที่มีขนาดไม่มากขนาดนั้น สนามไฟฟ้าจะเหนี่ยวนำให้ตำแหน่งเฉลี่ยของประจุบวกและลบแยกห่างออกจากกันระยะหนึ่ง ทำให้อะตอมทำตัวเป็นขั้วคู่ไฟฟ้าเล็ก ๆ ที่มีโมเมนต์ขั้วคู่ไฟฟ้า $\vec{p}$ ซึ่งชี้ไปในทิศเดียวกับสนามไฟฟ้าที่มาเหนี่ยวนำ เราเรียกว่าอะตอมถูกแยกขั้ว (ถูกโพลาไรซ์) และเรียกขั้วคู่ไฟฟ้าที่เกิดจากการเหนี่ยวนำนี้ว่า*ขั้วคู่ไฟฟ้าเหนี่ยวนำ* (*induced electric dipole*)

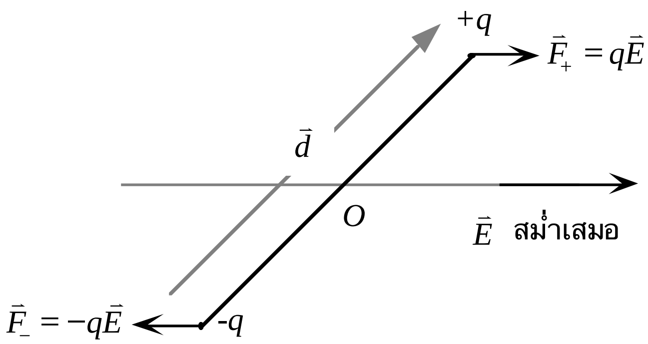


ในกรณีที่สอง สารไดอิเล็กตริกบางอย่างมีขั้วคู่ไฟฟ้าถาวรอยู่แล้วในเนื้อสาร ตัวอย่างเช่น ในโมเลกุลของน้ำ อิเล็กตรอนส่วนใหญ่รวมกันอยู่รอบๆ อะตอมของออกซิเจน และเนื่องจากพันธะโมเลกุลหักทำมุม 108° (ดูรูปหน้าถัดไป) ทำให้ตำแหน่งเฉลี่ยของประจุลบอยู่ที่จุดยอดหนึ่งและตำแหน่งเฉลี่ยของประจุบวกอยู่อีกปลายหนึ่ง การที่ประจุอยู่ในลักษณะนี้ทำให้เกิดเป็นขั้วคู่ไฟฟ้า



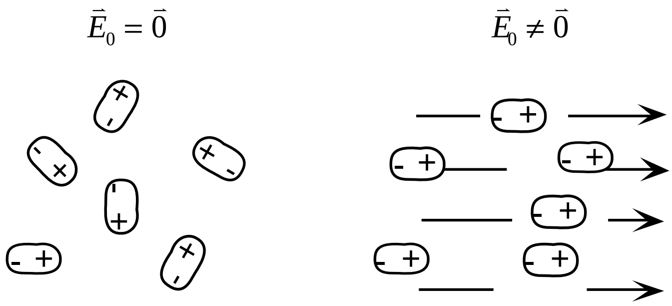
โมเลกุลของน้ำ

สำหรับสารชนิดนี้ ส่วนมากเมื่อยังไม่มีสนามไฟฟ้าจากภายนอกมากระทำขั้วคู่ไฟฟ้าของโมเลกุลต่างๆ จะวางตัวอยู่อย่างสะเปะสะปะไม่มีระเบียบ เนื่องจากพลังงานความร้อน ผลเฉลี่ยจึงดูเหมือนว่าไม่มีขั้วคู่ไฟฟ้า เมื่อมีสนามไฟฟ้าจากภายนอกมากระทำต่อสารไดอิเล็กตริกนี้ สนามไฟฟ้าจะทำให้เกิดทอร์กกระทำต่อขั้วคู่ไฟฟ้า หมุนขั้วคู่ไฟฟ้าให้พยายามวางตัวในแนวเดียวกับสนามไฟฟ้า (ดูรูปข้างล่าง)



ขั้วคู่ไฟฟ้าที่อยู่ในสนามไฟฟ้า $\vec{E}$ สม่ำเสมอมีทอร์กกระทำ $= \vec{p}\times\vec{E}$

ขั้วคู่ไฟฟ้าเหล่านี้อาจไม่สามารถหมุนไปจนขนานกับสนามไฟฟ้าได้ เนื่องจากพลังงานจลน์แบบสะเปะสะปะของความร้อนที่มีอยู่ แต่ถ้าสนามไฟฟ้ามีขนาดมากขั้วคู่ไฟฟ้าก็สามารถเรียงตัวได้ดีขึ้น โมเลกุลที่มีขั้วคู่ไฟฟ้าอยู่อย่างถาวร (เนื่องจากรูปร่างของโมเลกุล) เรียกว่าโมเลกุลขั้ว (polar molecule) โมเลกุลของไดอิเล็กตริกในแบบแรกที่ไม่มีขั้วคู่ไฟฟ้าถาวรเรียกว่า โมเลกุลไร้ขั้ว (nonpolar molecule)



โมเลกุลขั้วเมื่อไม่มีสนามไฟฟ้าภายนอกและเมื่อมีสนามไฟฟ้าภายนอก

รูปซ้ายมือบนแสดงให้เห็นโมเลกุลขั้วที่วางตัวอย่างไม่มีระเบียบเมื่อยังไม่มีสนามไฟฟ้าจากภายนอกมากระทำ เมื่อมีสนามไฟฟ้ามากระทำโมเลกุลขั้วเหล่านี้จะถูกหมุนไปให้ $\vec{p}$ ขนานกับสนามไฟฟ้า

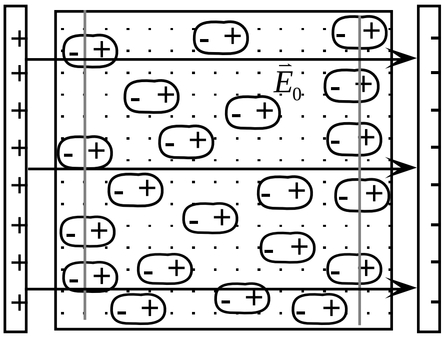
ถ้าเราเอาไดอิเล็กตริกไปวางไว้ระหว่างแผ่นคู่ขนานของตัวเก็บประจุแบบแผ่นคู่ขนาน ไม่ว่าโมเลกุลของไดอิเล็กตริกจะเป็นแบบขั้วหรือไร้ขั้ว ผลสุทธิที่สนามไฟฟ้ากระทำต่อทั้งสองชนิดเรียกได้ว่าเหมือนกันดังในรูปข้างล่าง ที่ผิวสองด้านของสารจะมีประจุลบเกินออกมาด้านหนึ่ง และอีกด้านหนึ่งเป็นประจุบวกที่เกินออกมา สำหรับภายในเนื้อสารแล้วโดยเฉลี่ยในบริเวณหนึ่งที่ไม่เล็กเกินไปจะมีประจุบวกและประจุลบขนาดเท่ากัน (สมมุติว่าเนื้อสารเป็นเนื้อชนิดเดียวกันตลอด) เราเรียกประจุที่ผิวของไดอิเล็กตริกที่เกิดจากการเหนี่ยวนำนี้ว่าประจุตรึงเพราะว่ามันถูกตรึงกับโมเลกุลของไดอิเล็กตริกและไม่สามารถเคลื่อนที่ได้อย่างอิสระเหมือนประจุอิสระบนแผ่นตัวนำ ประจุบวกและประจุลบส่วนที่เกินออกมาที่ผิวสองข้างทำให้เกิดสนามไฟฟ้า $\vec{E}_P$ ซึ่งมีทิศสวนกับสนามไฟฟ้า $\vec{E}_0$ จากภายนอกที่มาเหนี่ยวนำ ขนาดของสนามไฟฟ้าเหนี่ยวนำแปรผันกับขนาดของสนามไฟฟ้าจากภายนอก และดังนั้นทำให้มีขนาดแปรผันตรงกับสนามไฟฟ้าสุทธิด้วย

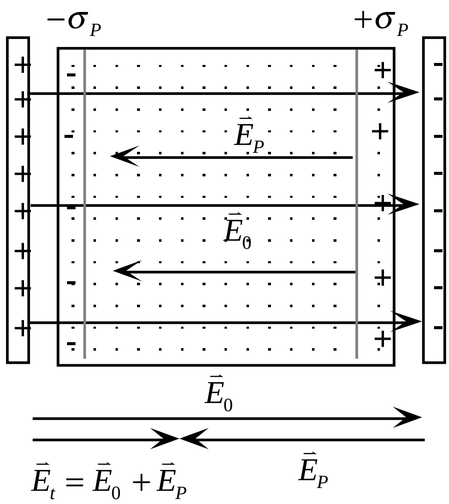
$$\vec{E}_P = -\chi \vec{E}_t$$

เราเรียกค่าคงตัวของการแปรผัน χ (กรีก "chi") ว่าสภาพอ่อนตัวเชิงไฟฟ้าของไดอิเล็กตริก สนามไฟฟ้าสุทธิภายในเนื้อสารเป็นผลบวกเวกเตอร์ของ $\vec{E}_P$ และ $\vec{E}_0$ ดังนั้น

$$\vec{E}_t = \vec{E}_0 + \vec{E}_P = \vec{E}_0 - \chi \vec{E}_t \quad \Rightarrow \quad \vec{E}_t = \left(\frac{1}{1+\chi}\right)\vec{E}_0 \equiv \frac{1}{\kappa}\vec{E}_0$$

จะเห็นได้ว่าสนามไฟฟ้าสุทธิภายในเนื้อไดอิเล็กตริกมีขนาดลดลง เราเรียกตัวประกอบ $\kappa \equiv 1+\chi$ (กรีก "kappa") ว่าค่าคงตัวไดอิเล็กตริกของไดอิเล็กตริก ทั้ง χ และ κ เป็นตัวเลขที่ไม่มีหน่วย ค่าคงตัวไดอิเล็กตริกสำหรับเยื่อบุผนังเซลทั่วไปมีค่าประมาณ 7 ค่าคงตัวไดอิเล็กตริกของน้ำมีค่าค่อนข้างสูง (ประมาณ 80) เพราะโมเลกุลของน้ำจัดเรียงตัวได้ง่าย





พิจารณาตัวเก็บประจุแผ่นคู่ขนานขนาดใหญ่ซึ่งมีขนาดประจุขนาดหนึ่ง เมื่อเราสอดไดอิเล็กตริกเข้าไประหว่างแผ่นคู่ขนาน สนามไฟฟ้าระหว่างแผ่นจะมีขนาดลดลงเป็น $1/\kappa$ เท่าของสนามเก่า ดังนั้นเราเห็นจาก

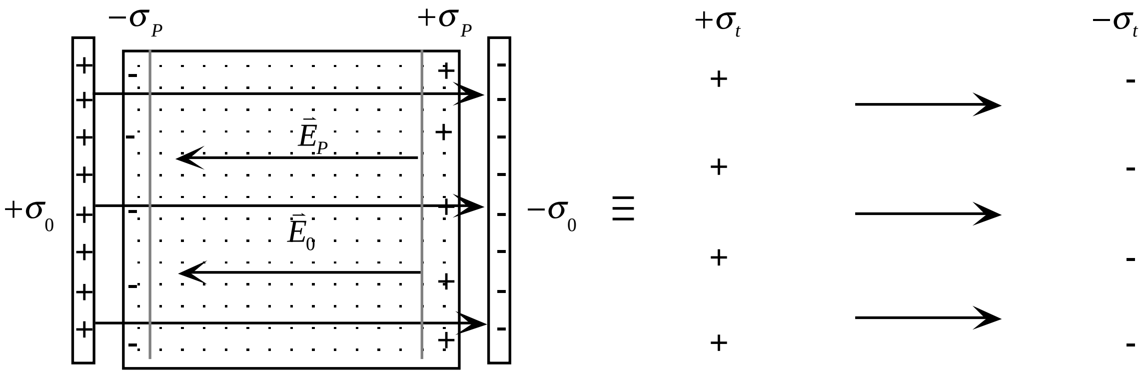
$$V \equiv V_{\text{บวก}} - V_{\text{ลบ}} = \int_{\text{บวก}}^{\text{ลบ}} \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

ว่าสนามไฟฟ้าภายในที่ลดลงนี้ทำให้ความต่างศักย์ระหว่างแผ่นคู่ขนานมีขนาดลดลงเป็น $1/\kappa$ เท่าของค่าเดิมตามไปด้วย เพราะฉะนั้นความจุไฟฟ้า $C = |q|/V$ จะมีขนาดสูงขึ้นเป็น κ เท่าของค่าก่อนใส่ไดอิเล็กตริก ในทางปฏิบัติเราอาจให้นิยามค่าคงตัวไดอิเล็กตริกว่า

$$\text{ค่าคงตัวไดอิเล็กตริกของสารไดอิเล็กตริก} = \frac{\text{ความจุไฟฟ้าเมื่อมีไดอิเล็กตริก}}{\text{ความจุไฟฟ้าเมื่อมีสุญญากาศคั่น}}$$

$$\kappa = \frac{C}{C_0} \quad \Rightarrow \quad C = \kappa C_0$$

ประจุไฟฟ้าที่ถูกเหนี่ยวนำที่ผิวไดอิเล็กตริกจะทำให้ดูเหมือนว่าประจุปรากฏที่แต่ละแผ่นของผิวตัวนำมีค่าลดลง ให้ σ_0 เป็นความหนาแน่นประจุบนแผ่นตัวนำ และ σ_t เป็นความหนาแน่นประจุปรากฏที่แต่ละข้างของแผ่นตัวนำเมื่อมีแผ่นไดอิเล็กตริกสอดระหว่างแผ่นตัวนำ

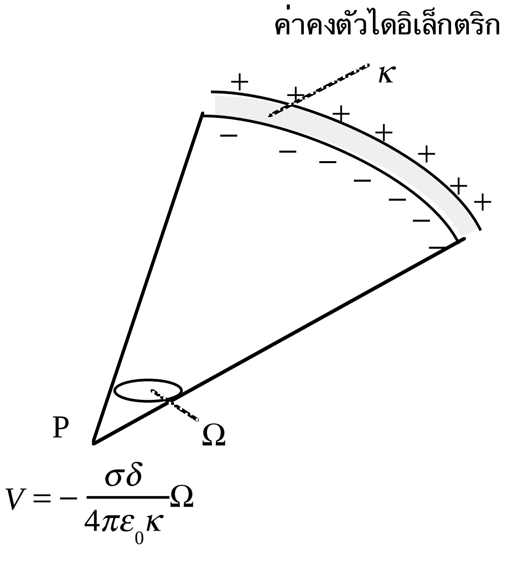


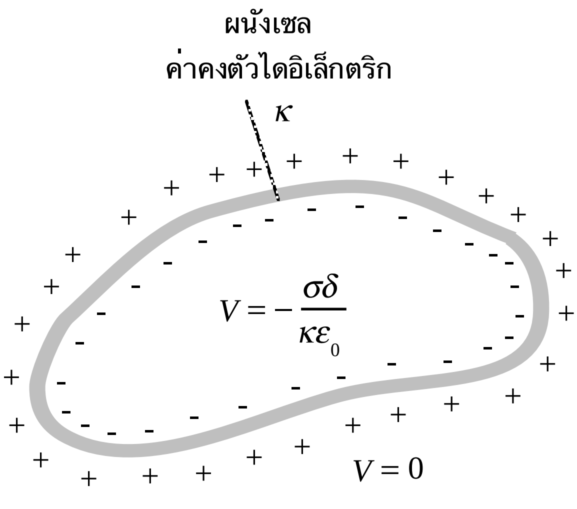
$$E_0 = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \qquad\qquad E_t = \frac{\sigma_t}{\varepsilon_0}$$

จากความรู้เดิม เราได้ว่า $E_0 = \dfrac{\sigma_0}{\varepsilon_0}$ และ $E_t = \dfrac{\sigma_t}{\varepsilon_0}$ แต่ $E_t = \dfrac{E_0}{\kappa}$ ดังนั้น

$$\frac{\sigma_t}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma_0}{\kappa\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad \sigma_t = \frac{\sigma_0}{\kappa}$$

ตัวอย่าง ศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากชั้นคู่ไฟฟ้าที่มีไดอิเล็กตริกคั่นกลาง





เซลในสภาพปกติมีประจุลบอยู่ภายใน มีประจุบวกอยู่ภายนอกและมีเยื่อผนังเซลเป็นไดอิเล็กตริกคั่นกลาง ทำให้ความหนาแน่นประจุปรากฏที่ผิวมีค่าลดลงจากกรณีที่ระหว่างชั้นประจุเป็นสุญญากาศเป็น $1/\kappa$ เท่า ดังนั้นในผลต่าง ๆ ที่เราเคยคำนวณได้ ตรงไหนที่มีความหนาแน่นประจุ σ อยู่ ถ้าเราแทนค่าด้วย σ/κ ก็จะให้ผลที่ควรคำนวณได้ในกรณีที่มีไดอิเล็กตริกคั่นกลางนี้ นั่นคือ ศักย์ไฟฟ้าที่จุดซึ่งอยู่ห่างจากชั้นคู่ไฟฟ้ามีค่า

$V = -\dfrac{\sigma\delta}{4\pi\varepsilon_0\kappa}\Omega$ สำหรับชั้นเปิด

$V = -\dfrac{\sigma\delta}{\kappa\varepsilon_0}$ สำหรับชั้นคู่ไฟฟ้าที่เป็นผิวปิด และจุดที่สนใจศักย์ไฟฟ้าอยู่ภายใน เช่น ในเซล

$V = 0$ สำหรับชั้นคู่ไฟฟ้าที่เป็นผิวปิด และจุดที่สนใจศักย์ไฟฟ้าอยู่ภายนอก เช่น นอกเซล

Polarization

ในไดอิเล็กตริกทั้งสองชนิด เมื่อมีสนามไฟฟ้าจากภายนอกมากระทำจะทำให้เกิดขั้วคู่ไฟฟ้าเล็ก ๆ จำนวนมากมายที่วางตัวขนานไปตามทิศของสนามไฟฟ้า เราเรียกว่าไดอิเล็กตริกถูกเหนี่ยวนำขั้ว ปริมาณที่สะดวกปริมาณหนึ่งที่ใช้วัดว่าไดอิเล็กตริกถูกเหนี่ยวนำขั้วมากน้อยแค่ไหนก็คือ Polarization vecrtor $\vec{P}$ (หรือ Polarization เฉย ๆ) ซึ่งเราให้นิยามดังนี้

$$\vec{P} \equiv \text{โมเมนต์ขั้วคู่ไฟฟ้าต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร}$$

หน่วยของ $\vec{P}$ คือ $\mathrm{C \cdot m/m^3 = C/m^2}$

ถ้าให้ n เป็นจำนวนขั้วคู่ไฟฟ้าต่อหนึ่งหน่วยปริมาตร และ $\bar{p}$ เป็นโมเมนต์ขั้วคู่ไฟฟ้าของแต่ละขั้วคู่ไฟฟ้า (หรือถือว่าเป็นค่าเฉลี่ยของทั้งหมดซึ่งถือว่าเป็นตัวแทนได้) เราจะได้ว่า

$$\vec{P} = n\bar{p}$$

ในปริมาตร $d\tau$ เล็กๆ โมเมนต์ขั้วคู่ไฟฟ้าของปริมาตรนี้มีค่า $d\bar{p} = \vec{P}d\tau$ เรารู้ว่าศักย์ไฟฟ้า (ที่จุดไกล ๆ) เนื่องจากขั้วคู่ไฟฟ้าที่มีโมเมนต์ขั้วคู่ไฟฟ้า $\bar{p}$ คือ $V = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{\bar{p}\cdot\hat{r}}{r^2}$ ดังนั้นศักย์ไฟฟ้า dV เนื่องจากขั้วคู่ไฟฟ้าในปริมาตร $d\tau$ มีค่า

$$dV = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d\bar{p}\cdot\hat{r}}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{P}\cdot\hat{r}\,d\tau}{r^2}$$

และศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากขั้วคู่ไฟฟ้าเล็ก ๆ ทั้งหมดภายในปริมาตร $d\tau$ คือ

$$V_P = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau \frac{\vec{P}\cdot\hat{r}}{r^2}d\tau$$

ตัวห้อย P ที่ V_P เขียนไว้เพื่อแสดงว่าเป็นศักย์ไฟฟ้าเนื่องจากสารที่ถูกเหนี่ยวนำขั้ว

ดังนั้น ถ้าเรารู้ค่าของ polarization vector $\vec{P}$ เราสามารถหาศักย์ไฟฟ้าและความเข้มสนามไฟฟ้าเนื่องจากสารที่ถูกเหนี่ยวนำขั้วได้ (อย่างน้อยก็ทางทฤษฎี) polarization $\vec{P}$ ที่จุด ๆ หนึ่งมีค่าขึ้นกับความเข้มสนามไฟฟ้าทั้งหมดที่จุดนั้นอันเนื่องมาจากประจุทั้งหมด นั่นคือ เนื่องจากแหล่งต้นตอของสนามไฟฟ้าที่มาเหนี่ยวนำและเนื่องจากขั้วคู่ไฟฟ้าที่ถูกเหนี่ยวนำให้เกิดขึ้น