การเคลื่อนที่ในระนาบ

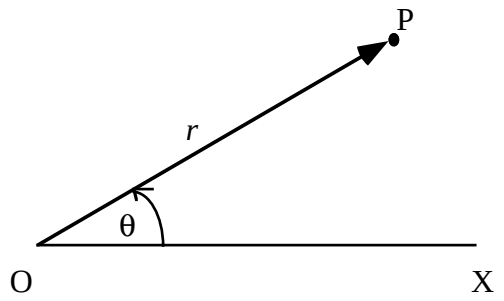
0. บทนำ

การเคลื่อนที่โดยทั่วไปไม่ใช่การเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง การที่เราจะเข้าใจการเคลื่อนที่วิถีโค้งของลูกบอลหรือวงโคจรของดาวเทียม เราต้องขยายการพิจารณาออกไปในยังการเคลื่อนที่ในระนาบและการเคลื่อนที่ทั่วไป การเคลื่อนที่สำคัญหลายอย่างเป็นการเคลื่อนที่ในระนาบ ดังนั้นเราจะพิจารณาการเคลื่อนที่ในระนาบก่อน ขั้นตอนต่าง ๆ ในการบรรยายการเคลื่อนที่ในระนาบเหมือนกับในแนวเส้นตรง เริ่มตั้งแต่การบอกตำแหน่ง การเปลี่ยนตำแหน่ง และอื่น ๆ ไปจนกระทั่งถึงความเร่ง

1. ตำแหน่งและการกระจัด

1.1 ตำแหน่ง

เราบอกตำแหน่งเทียบกับจุดอ้างอิงที่เราเลือกตามความเหมาะสมกับสถานการณ์ และบอกว่าจุดที่เราสนใจ อยู่ทิศไหนของจุดอ้างอิงและเป็นระยะทางเท่าไร ในการบอกทิศในระนาบเราจะต้องมีแนวอ้างอิงและบอกว่าวัดมุมนั้นไปทางไหน ตามหรือทวนเข็มนาฬิกา



รูป 1.1

ในรูป 1.1 O เป็นจุดอ้างอิง OX เป็นแนวอ้างอิง และ P เป็นจุดที่เราต้องการบอกตำแหน่ง P อยู่ในทิศทำมุม θ จากแนว OX วัดทวนเข็มนาฬิกา และอยู่ห่างจาก O เป็นระยะ r

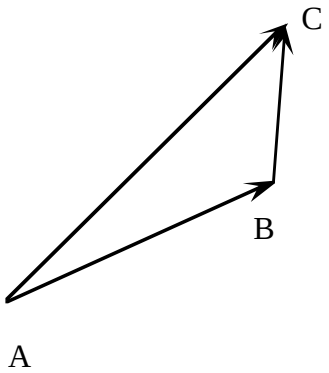
1.2 การเปลี่ยนตำแหน่ง

ถ้าที่เวลาหนึ่งอนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง P และที่เวลาต่อมาอนุภาคย้ายไปอยู่ที่อีกตำแหน่ง Q สมมุติว่าในระหว่างที่อนุภาคย้ายตำแหน่งนี้เราไม่เห็นว่าอนุภาคย้ายตำแหน่งอย่างไร สิ่งที่เราเห็นคือตำแหน่งตั้งต้นและตำแหน่งสุดท้ายเท่านั้น ดังนั้นเราบอกการย้ายตำแหน่งได้แต่เพียงว่าอนุภาคย้ายจากจุด P ไปยังจุด Q ไปทางทิศไหนและเป็นระยะทางเท่าไร ซึ่งก็เหมือนกับการบอกตำแหน่งเทียบกับจุดอ้างอิงนั่นเอง

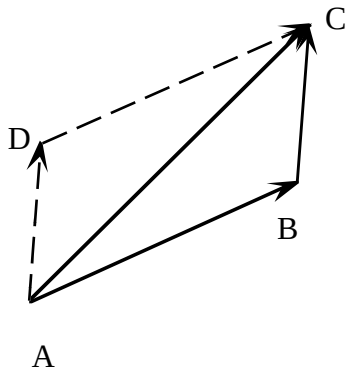
1.3 การเปลี่ยนตำแหน่งติดต่อกัน และการเปลี่ยนตำแหน่งพร้อมกัน

1.3.1 การเปลี่ยนตำแหน่งติดต่อกัน

สมมุติว่าอนุภาคย้ายตำแหน่งจาก A ไป B แล้วย้ายตำแหน่งต่อจาก B ไป C ในแง่ของการย้ายตำแหน่ง ผลลัพธ์มีค่าเท่ากับการเปลี่ยนตำแหน่งจาก A ไป C โดยตรง ทั้งนี้เพราะว่าเราสนใจแต่จุดตั้งต้นและจุดสุดท้ายเท่านั้น



รูป 1.3.1



รูป 1.3.2

แต่ถ้าเราเดินทางจาก A ไป D ในทิศที่ขนานกับการเปลี่ยนตำแหน่งจาก B ไป C เป็นระยะที่เท่ากัน แล้วเปลี่ยนตำแหน่งจาก D ไปในทิศที่ขนานกับการเปลี่ยนตำแหน่งจาก A ไป B เป็นระยะทางเท่ากับการเปลี่ยนตำแหน่งนั้น เราจะไปถึงจุด C ได้เหมือนกัน

ถ้าเราสนใจแต่ทิศและระยะทางเท่านั้น เราสามารถถือได้ว่าการเปลี่ยนตำแหน่งจาก A ไป B เหมือนกับการเปลี่ยนตำแหน่งจาก D ไป C และการเปลี่ยนตำแหน่งจาก B ไป C เหมือนกับการเปลี่ยนตำแหน่งจาก A ไป D เราเรียกการเปลี่ยนตำแหน่งที่ไม่สนใจว่าจุดตั้งต้นเป็นจุดใดว่า*การกระจัด* คุณสมบัติของการกระจัดคือทิศและระยะทางเท่านั้น

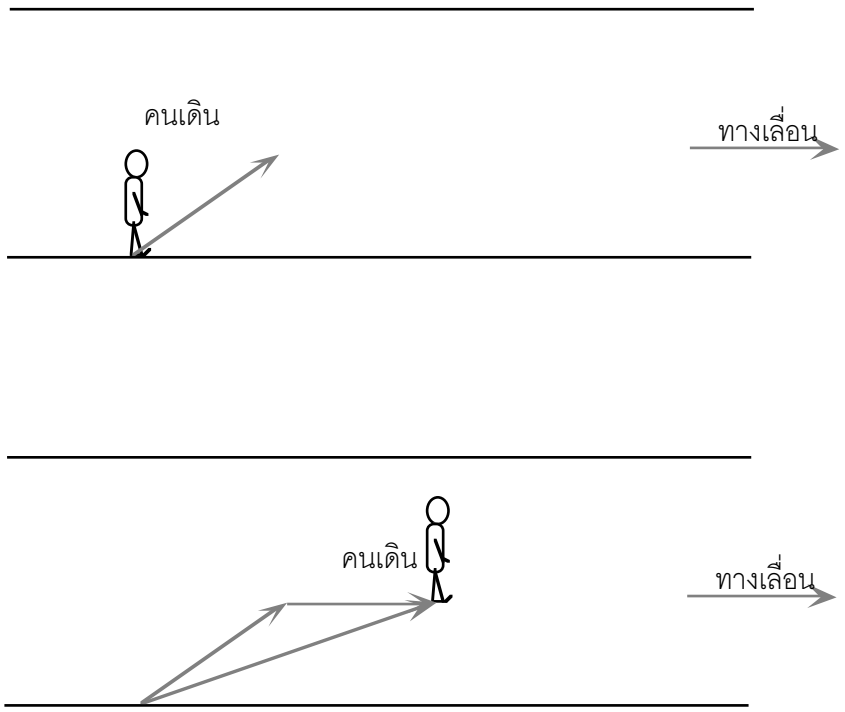
ถ้าการกระจัดสองการกระจัดมีทิศเดียวกันและมีขนาดเท่ากัน เราถือว่าการกระจัดทั้งสองเท่ากัน

การกระจัดเป็นตัวอย่างของปริมาณเวกเตอร์ซึ่งมีกฎการ"บวก"ที่แน่นอน เราใช้สัญลักษณ์ที่มีลูกศรข้างบน เช่น $\vec{A}$ แทนปริมาณเวกเตอร์ หรือบางทีก็อาจใช้ตัวทึบหนา $\mathbf{A}$ แทน และใช้เครื่องหมายบวก + แทนการรวมปริมาณเวกเตอร์เข้าด้วยกัน แต่เราต้องระลึกไว้เสมอว่าการใช้เครื่องหมายบวกที่เหมือนกันไม่ได้ความว่าเราบวก

ปริมาณเวกเตอร์เหมือนกับการบวกเลขจำนวนจริงธรรมดา ในการบวกเวกเตอร์เราต้องดูว่าเราตกลงให้รวมเวกเตอร์กันอย่างไร สำหรับการกระจัดเราตกลงว่าการบวกการกระจัดสองการกระจัดให้ผลเท่ากับการกระจัดหนึ่งการกระจัดซึ่งมีค่าหาได้ในทำนองเดียวกับการเปลี่ยนตำแหน่งสองครั้งติดต่อกัน เราแทนการกระจัดด้วยลูกศรซึ่งขนาดความยาวแปรผันตรงกับขนาดการกระจัดและมีทิศขนานกับการกระจัด

1.3.2 การกระจัดพร้อมกัน

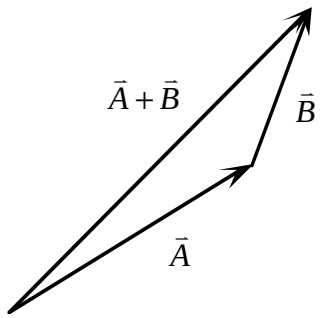
เราบางคนคงเคยเดินเล่นบนบันไดเลื่อนหรือบนทางเลื่อน (ตามห้างสรรพสินค้าหรือที่สนามบิน) หรืออาจเดินเล่นบนเรือหรือเครื่องบินที่กำลังแล่นไป การเคลื่อนที่แบบนี้เป็นการเคลื่อนที่เนื่องจากการกระจัดสองทางพร้อมกัน การกระจัดหนึ่งเป็นการกระจัดของทางเลื่อนที่เลื่อนไป ส่วนอีกการกระจัดหนึ่งเป็นการกระจัดของคนที่เดินไปบนทางเลื่อน (เดินไปทางไหนก็ได้ ไม่จำเป็นต้องเป็นในแนวเดียวกับทางเลื่อน จะเดินขวางก็ได้) จากการทดลองพบว่า การกระจัดลัพธ์มีผลเท่ากับผลบวกเนื่องจากการกระจัดแต่ละอย่างโดด ๆ โดยที่ในการบวกการกระจัด เราทำเหมือนกับการบวกการกระจัดแต่ละการกระจัดติดต่อกันแบบเดียวกับในหัวข้อที่แล้ว ทั้งนี้ไม่สำคัญว่าเราเริ่มการกระจัดใดก่อน



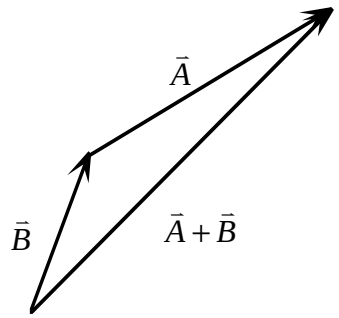
เราสรุปกฎการรวมการกระจัดไว้ในหัวข้อถัดไป กฎนี้เป็นตัวอย่างกฎการบวกปริมาณเวกเตอร์

1.4 กฎการรวมการกระจัด(โดยการใช้รูป)

ให้ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็นการกระจัดสองการกระจัด เราหา $\vec{A}+\vec{B}$ ได้โดยการลากการกระจัดที่แทน $\vec{A}$ แล้วต่อด้วยเส้นตรงที่แทนการกระจัด $\vec{B}$ เส้นตรงที่ลากจากจุดตั้งต้นที่เป็นหางของ $\vec{A}$ ไปยังปลายลูกศร $\vec{B}$ จะแทนการกระจัดลัพธ์ที่ต้องการ เราหาขนาดของการกระจัดลัพธ์ได้โดยการวัดความยาวลูกศรด้วยไม้บรรทัด แล้วเทียบสัดส่วนกลับเป็นขนาดการกระจัดตามสัดส่วนที่ใช้ในการวาดลูกศรตอนแรก



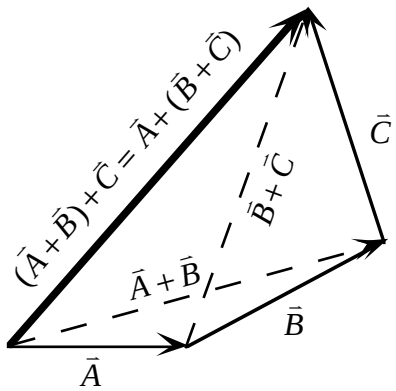
รูป 1.4.1



รูป 1.4.2

ตามกฎการบวกแบบนี้จะเห็นได้ว่า $\vec{B}+\vec{A}$ มีค่าเท่ากับ $\vec{A}+\vec{B}$ เช่นเดียวกับที่การเดินไปทางเหนือ 3 m แล้วต่อด้วยการเดินไปทางทิศตะวันออก 4 m พาเราไปยังจุดเดียวกับที่การเดินไปทางทิศตะวันออก 4 m แล้วต่อด้วยการเดินไปทางเหนือ 3 m พาเราไปถึง

นอกจากนั้นถ้าเราทำการกระจัด $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ สามการกระจัดติดต่อกัน ไม่ว่าเราจะรวมการกระจัด $\vec{A}$ กับ $\vec{B}$ ก่อนแล้วค่อยไปรวมกับ $\vec{C}$ หรือรวมการกระจัด $\vec{B}$ กับ $\vec{C}$ ก่อนแล้วนำไปรวมกับ $\vec{A}$ ผลที่ได้จะมีค่าเท่ากัน นั่นคือลำดับการบวกไม่สำคัญ



รูป 1.4.3

เราเขียนว่า $$(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$$

1.5 การกระจัดศูนย์และการคูณการกระจัดด้วยปริมาณสเกลาร์

1.5.1 การกระจัดศูนย์

ถ้าเราเดินทางไปและกลับมาที่เดิมโดยที่ตำแหน่งตั้งต้นเป็นตำแหน่งเดียวกับตำแหน่งสุดท้าย แล้วต่อด้วยการกระจัดหนึ่ง การกระจัดรวมมีเท่ากับการทำการกระจัดหลังสุดเท่านั้น ในทำนองเดียวกันถ้าเราทำการกระจัดหนึ่งแล้วต่อด้วยการกระจัดที่ออกไปแล้วกลับที่เดิม การกระจัดรวมก็มีค่าเท่ากับการกระจัดแรกเท่านั้น เราเรียกการกระจัดพิเศษที่ตำแหน่งตั้งต้นและตำแหน่งสุดท้ายเป็นตำแหน่งเดียวกันว่า*การกระจัดศูนย์*และแทนด้วยสัญลักษณ์ $\vec{0}$ จากที่กล่าวมาข้างบนเห็นได้ว่าการกระจัดศูนย์คือการกระจัดที่รวมกับการกระจัด $\vec{A}$ ใด ๆ แล้วมีค่าเท่ากับการกระจัด $\vec{A}$ นั้น นั่นคือ

$$\vec{A}+\vec{0}=\vec{A} \qquad \text{และ} \qquad \vec{0}+\vec{A}=\vec{A}$$

สมมุติว่าเราทำการกระจัด $\vec{A}$ สองครั้งติดต่อกัน ผลที่ได้คือการกระจัดที่มีทิศเดียวกับ $\vec{A}$ แต่มีขนาดเป็นสองเท่า เราจะเขียนการกระจัดนี้ว่า $2\vec{A}$ ถ้าเราทำการกระจัด $2\vec{A}$ แล้วต่อด้วยการกระจัด $3\vec{A}$ ผลลัพธ์ที่ได้คือการกระจัดที่มีทิศเดียวกับ $\vec{A}$ แต่มีขนาดเป็นห้าเท่าของ $\vec{A}$ เราเขียนเป็นสมการได้ว่า

$$2\vec{A}+3\vec{A}=5\vec{A}=(2+3)\vec{A}$$

จริง ๆ แล้วเราสามารถมีการกระจัดในทิศเดียวกับ $\vec{A}$ โดยที่ขนาดไม่จำเป็นต้องเป็นจำนวนเต็มเท่าของ $\vec{A}$ ก็ได้ ดังนั้นถ้าให้ a เป็นเลขจริงบวกใด ๆ เราให้นิยามผลคูณการกระจัด $\vec{A}$ ด้วย a ว่าคือการกระจัด $a\vec{A}$ ซึ่งเป็นการกระจัดที่มีทิศเดียวกับ $\vec{A}$ แต่มีขนาดเป็น a เท่า

จากนิยามนี้และด้วยเหตุผลเช่นเดียวกับข้างบน เราจะได้ว่า

$$a\vec{A}+b\vec{A}=(a+b)\vec{A}$$

โดยที่ a และ b คือเลขจริงบวกใด ๆ

1.5.2 การกระจัดลบ

สังเกตอีกว่าถ้าเราทำการกระจัด $\vec{A}$ แล้วต่อด้วยการกระจัด $\vec{B}$ ที่มีทิศตรงข้ามแต่มีขนาดเท่ากับ $\vec{A}$ เราจะกลับมาอยู่ที่เดิมคือได้การกระจัดศูนย์

$$\vec{A}+\vec{B}=\vec{0}$$

เราเรียกการกระจัด $\vec{B}$ ที่มีทิศตรงข้ามแต่มีขนาดเท่ากับ $\vec{A}$ ว่า*การกระจัดลบ*ของ $\vec{A}$ และเขียนแทนด้วยสัญลักษณ์ $(-\vec{A})$ นั่นคือ

$$\vec{A}+(-\vec{A})=\vec{0}$$

เพื่อให้สอดคล้องกับสมการ $a\vec{A}+b\vec{A}=(a+b)\vec{A}$ เราให้นิยามผลคูณการกระจัด $\vec{A}$ ด้วย -1 ว่าคือการกระจัด $(-\vec{A})$ นั่นคือ

$$(-1)\vec{A}=(-\vec{A})$$

ทำให้ $$\vec{A}+(-1)\vec{A}=[1+(-1)]\vec{A}=(1-1)\vec{A}=0\vec{A}=\vec{0}$$

โดยที่ในขั้นสุดท้ายเราใช้เหตุผลที่ว่าการกระจัดที่มีขนาดศูนย์คือการกระจัดศูนย์ และเราให้นิยามให้กว้างขึ้นว่าผลคูณของการกระจัด $\vec{A}$ ด้วย $-a$ เมื่อ a เป็นปริมาณจริงบวก คือการกระจัดที่มีขนาดเป็น a เท่าของ $\vec{A}$ แต่มีทิศตรงข้ามกับ $\vec{A}$

เราสามารถรวมนิยามการคูณการกระจัดด้วยเลขจริงทั้งบวกและลบรวมกันดังนี้: ถ้า s เป็นปริมาณจริงใด ๆ การกระจัด $s\vec{A}$ คือการกระจัดที่มีขนาดเป็น $|s|$ เท่าของการกระจัด $\vec{A}$ และมีทิศเดียวกับ $\vec{A}$ ถ้า s เป็นบวก แต่มีทิศตรงข้ามกับ $\vec{A}$ ถ้า s เป็นลบ และเมื่อ $s=0$ การกระจัดที่ได้คือการกระจัดศูนย์ $\vec{0}$ เราเรียก s ว่าเป็น*ปริมาณสเกลาร์*

1.6 การลบการกระจัด

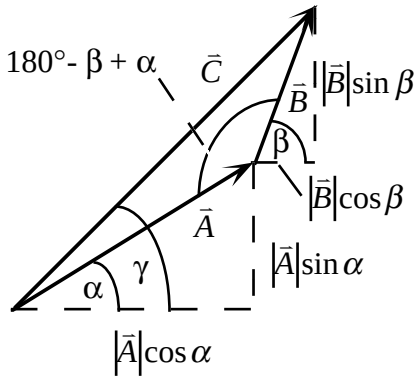
โดยการใช้การกระจัดลบของการกระจัด เราสามารถให้นิยามการลบการกระจัดได้ดังนี้ ให้ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็นการกระจัดสองการกระจัดใด ๆ $\vec{A}$ ลบด้วย $\vec{B}$ หรือ $\vec{A}-\vec{B}$ คือการกระจัดที่ได้จากการรวมการกระจัด $\vec{A}$ กับการกระจัดที่มีขนาดเท่ากับ $\vec{B}$ แต่มีทิศตรงข้ามกับ $\vec{B}$ นั่นคือ

$$\vec{A}-\vec{B}\equiv\vec{A}+(-\vec{B})$$

1.7 การหาผลรวมกระจัดโดยการคำนวณ

การรวมการกระจัดโดยใช้วิธีการสร้างรูปและการวัดให้คำตอบที่ค่อนข้างหยาบ การหาจากการคำนวณเป็นวิธีการซึ่งให้คำตอบที่แน่นอนกว่า

พิจารณาการเคลื่อนที่ในระนาบ ให้ $\vec{C}$ เป็นการกระจัดที่ได้จากการบวกการกระจัด $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ดังรูปข้างล่าง เราต้องการหาขนาดและทิศของ $\vec{C}$ จากขนาดและทิศของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$



รูป 1.7.1

ให้ $|\vec{A}|$, $|\vec{B}|$ และ $|\vec{C}|$ เป็นขนาดของการกระจัด $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ ตามลำดับ นอกจากนี้ให้ α, β และ γ เป็นมุมที่การกระจัด $\vec{A}$, $\vec{B}$ และ $\vec{C}$ ตามลำดับทำกับแนวอ้างอิงตามแนวนอน โดยที่ให้ทิศทวนเข็มนาฬิกาเป็นบวก จากการใช้กฎของโคไซน์กับด้านของสามเหลี่ยม และจากนิยามของแทนเจนต์ เราได้ว่า

$$|\vec{C}| = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 - 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos(180° - \beta + \alpha)} = \sqrt{|\vec{A}|^2 + |\vec{B}|^2 + 2|\vec{A}||\vec{B}|\cos(\beta - \alpha)}$$

$$\tan\gamma = \frac{|\vec{A}|\sin\alpha + |\vec{B}|\sin\beta}{|\vec{A}|\cos\alpha + |\vec{B}|\cos\beta}$$

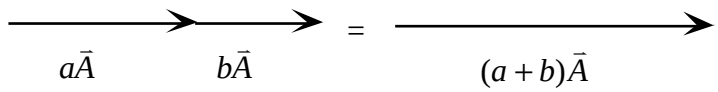
การบวกการกระจัดด้วยวิธีนี้เหมาะสำหรับการบวกการกระจัดทีละคู่ แต่ไม่สามารถนำมาใช้กับการบวกการกระจัดหลายการกระจัดพร้อมกันทีเดียวได้ ถ้าจะใช้ เราจะต้องบวกทีละสองการกระจัด แล้วเอาผลที่ได้ไปบวกกับอีกการกระจัด ทำเป็นคู่ ๆ ไปจนหมด ในการบวกการกระจัดเรามีอีกวิธีหนึ่งซึ่งสะดวกกว่า

1.8 การรวมการกระจัดโดยวิธีองค์ประกอบ

1.8.1 การกระจัดองค์ประกอบ

เราเริ่มต้นจากข้อสังเกตที่ว่า มีสองกรณีที่เราสามารถบวกการกระจัดได้อย่างง่าย ๆ

1. ถ้าการกระจัดสองการกระจัดอยู่ในแนวเดียวกัน เราเอาขนาดของการกระจัดมาบวกหรือลบกัน แล้วแต่ว่าการกระจัดทั้งสองมีทิศเดียวกันหรือสวนทางกัน



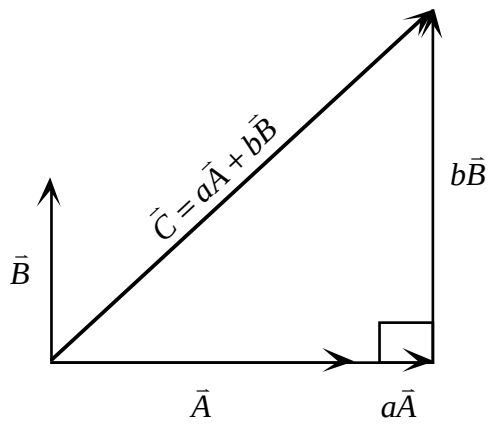
รูป 1.8.1

2. ถ้าการกระจัดทั้งสองมีทิศตั้งฉากกัน ขนาดของการกระจัดหาได้จากกฎพิธากอรัสของสามเหลี่ยมมุมฉาก และมุมหาได้จากอัตราส่วนของขนาดของการกระจัดทั้งสอง

นอกจากนั้นการกระจัดใด ๆ ในระนาบสามารถเขียนให้อยู่ในรูปของผลบวกของสองการกระจัดที่ไม่ได้อยู่ในแนวเดียวกันได้ แต่จากข้อสังเกตข้างบนเราพบว่าเป็นการสะดวกกว่าถ้าเราเขียนให้อยู่ในรูปของการกระจัดที่ทำมุมฉากกัน สมมุติให้ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เป็นการกระจัดที่ตั้งฉากกัน จากรูปข้างล่างเราเห็นได้ว่าเราสามารถทำการกระจัด $\vec{C}$ ได้โดยการทำการกระจัด $\vec{C}_A$ แล้วต่อด้วยการกระจัด $\vec{C}_B$ นั่นคือ

$$\vec{C} = \vec{C}_A + \vec{C}_B$$

เราเรียก $\vec{C}_A$ และ $\vec{C}_B$ ว่าเป็น*การกระจัดองค์ประกอบ*ของ $\vec{C}$ ในทิศของการกระจัด $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ ตามลำดับ



รูป 1.8.2

เนื่องจาก $\vec{C}_A$ เป็นการกระจัดในทิศเดียวกับ $\vec{A}$ และ $\vec{C}_B$ เป็นการกระจัดในทิศเดียวกับ $\vec{B}$ เราสามารถเขียนได้ว่า

$$\vec{C}_A = a\vec{A} \qquad \text{และ} \qquad \vec{C}_B = a\vec{B}$$

ดังนั้น $$\vec{C} = a\vec{A} + b\vec{B}$$

1.8.2 การกระจัดหนึ่งหน่วย

จริง ๆ แล้วเราสนใจว่าเราจะเขียนว่า $\vec{C}$ ประกอบด้วยการกระจัดใดที่มีทิศอยู่ในแนวเดียวกับ $\vec{A}$ บวกกับการกระจัดใดที่มีทิศในแนวเดียวกับ $\vec{B}$ เราไม่ได้สนใจขนาดของ $\vec{A}$ และ $\vec{B}$ เลย เราต้องการเพียงแต่ทิศ ดังนั้นเพื่อความสะดวกในการบอกทิศ เราจะใช้การกระจัดที่มีขนาดหนึ่งหน่วยเพื่อใช้บอกทิศ เราเรียกการกระจัดนี้ว่า*การกระจัดหนึ่งหน่วย* จากการกระจัด $\vec{A}$ เราสามารถสร้างการกระจัดหนึ่งหน่วยที่มีทิศเดียวกับ $\vec{A}$ ได้โดยการคูณการกระจัด $\vec{A}$ ด้วยส่วนกลับของขนาดของการกระจัด $\vec{A}$ ถ้าเราใช้สัญลักษณ์ $\hat{A}$ แทนการกระจัดหนึ่งหน่วยที่มีทิศเดียวกับ $\vec{A}$ จะได้ว่า

$$\hat{A} = \frac{1}{|\vec{A}|}\vec{A}$$

$\hat{A}$ มีขนาดเท่ากับหนึ่งหน่วยเพราะว่าโดยนิยามการคูณด้วยปริมาณสเกลาร์ $\frac{1}{A}\vec{A}$ มีขนาดเท่ากับ $\frac{1}{A}$ คูณกับขนาดของ $\vec{A}$ ในทางกลับกันเราเขียนได้ว่า

$$\vec{A} = |\vec{A}|\hat{A}$$

เพราะฉะนั้นเราเขียนสมการข้างบนได้ใหม่ว่า

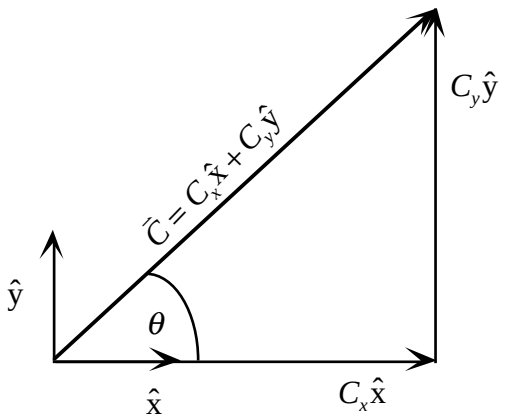
$$\vec{C} = a\vec{A} + b\vec{B} = a|\vec{A}|\hat{A} + b|\vec{B}|\hat{B} = C_A\hat{A} + C_B\hat{B}$$

โดยที่เราให้ $C_A = a|\vec{A}|$ และ $C_B = b|\vec{B}|$ เราเรียก C_A และ C_B ว่าเป็น*องค์ประกอบ*ของ $\vec{C}$ ในทิศของ $\hat{A}$ และ $\hat{B}$ ตามลำดับ

1.8.3 การแตกการกระจัดออกเป็นองค์ประกอบในแนวที่ตั้งฉากกัน

ดังนั้น ถ้าเราให้ $\hat{\mathrm{x}}$ และ $\hat{\mathrm{y}}$ เป็นการกระจัดหนึ่งหน่วยที่มีทิศตั้งฉากกัน เราสามารถเขียนการกระจัด $\vec{C}$ ใด ๆ ว่า

$$\vec{C} = \vec{C}_x + \vec{C}_y = C_x\hat{\mathrm{x}} + C_y\hat{\mathrm{y}}$$



รูป 1.8.3

จากรูป 1.8.3 เมื่อกำหนดขนาดของการกระจัด $\vec{C}$ และมุม θ ที่การกระจัดทำกับแนวอ้างอิง $\hat{\mathrm{x}}$ เราสามารถหาได้ว่า

$$C_x = |\vec{C}|\cos\theta, \quad C_y = |\vec{C}|\sin\theta$$

ความสัมพันธ์นี้เป็นจริงไม่ว่ามุม θ มีค่าเป็นเท่าใด ดังนั้นถ้าการกระจัดสองการกระจัดมีค่าเท่ากัน คือมีขนาดเท่ากันและมีทิศเหมือนกัน เราสรุปได้จากข้างบนว่าการกระจัดทั้งสองต้องมีองค์ประกอบเท่ากันด้วย นั่นคือ

$$\vec{C} = \vec{D} \quad \Rightarrow \quad C_x = D_x, \quad C_y = D_y$$

หมายเหตุ: คุณสมบัติข้อนี้เป็นสิ่งที่ทำให้เราสามารถแยกพิจารณาการกระจัดตามทิศ $\hat{\mathrm{x}}$ แยกออกจากการกระจัดตามทิศ $\hat{\mathrm{y}}$ ได้เหมือนกับเป็นอิสระต่อกัน

ในทางกลับกันถ้าเรารู้องค์ประกอบ C_x และ C_y ของการกระจัด $\vec{C}$ ในทิศ $\hat{\mathrm{x}}$ และ $\hat{\mathrm{y}}$ ตามลำดับ เราก็สามารถหาขนาดของการกระจัด $|\vec{C}|$ และมุม θ ที่การกระจัดทำกับแนวอ้างอิง $\hat{\mathrm{x}}$ ได้จาก

$$|\vec{C}| = \sqrt{C_x^2 + C_y^2}, \quad \theta = \arctan\left(\frac{C_y}{C_x}\right)$$

1.8.4 การบวกการกระจัดจากองค์ประกอบ

หลังจากที่เรารู้วิธีเขียนการกระจัดในรูปขององค์ประกอบที่ตั้งฉากกันแล้ว เราสามารถบวกการกระจัดหลายการกระจัดพร้อมกันได้ดังนี้ สมมุติว่าเรามีการกระจัด $\vec{D}_1, \vec{D}_2$ และ $\vec{D}_3$ ซึ่งเราต้องการรวมกัน ให้เราเรียกการกระจัดลัพธ์ของการกระจัดทั้งหมดนี้ว่า $\vec{R}$ ดังนั้น

$$\vec{R} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2 + \vec{D}_3 = D_{1x}\hat{\mathrm{x}} + D_{1y}\hat{\mathrm{y}} + D_{2x}\hat{\mathrm{x}} + D_{2y}\hat{\mathrm{y}} + D_{3x}\hat{\mathrm{x}} + D_{3y}\hat{\mathrm{y}}$$

เรารวมการกระจัดในทิศ $\hat{\mathrm{x}}$ เข้าด้วยกัน และการกระจัดในทิศ $\hat{\mathrm{y}}$ เข้าด้วยกัน จะได้ว่า

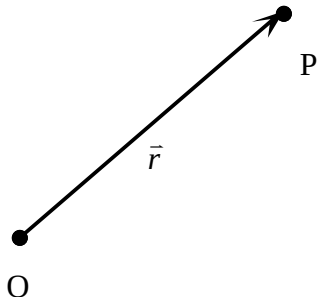
$$\vec{R} = (D_{1x} + D_{2x} + D_{3x})\hat{\mathrm{x}} + (D_{1y} + D_{2y} + D_{3y})\hat{\mathrm{y}}$$

ขนาดของการกระจัดลัพธ์คือ $|\vec{R}| = \sqrt{(D_{1x} + D_{2x} + D_{3x})^2 + (D_{1y} + D_{2y} + D_{3y})^2}$

และทิศที่ $\vec{R}$ ทำกับทิศ $\hat{\mathrm{x}}$ คือ $\theta = \arctan\left(\dfrac{D_{1y} + D_{2y} + D_{3y}}{D_{1x} + D_{2x} + D_{3x}}\right)$

1.9 เวกเตอร์บอกตำแหน่ง

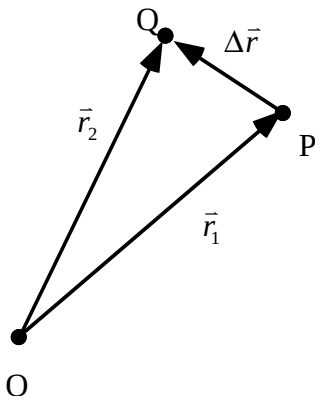
เราใช้สัญลักษณ์ $\vec{r}$ แทนเวกเตอร์บอกตำแหน่งของจุด P เทียบกับจุดอ้างอิง O สังเกตว่าตำแหน่งของจุดใด ๆ คือการกระจัดจากจุดอ้างอิง O ไปยังจุดนั้น



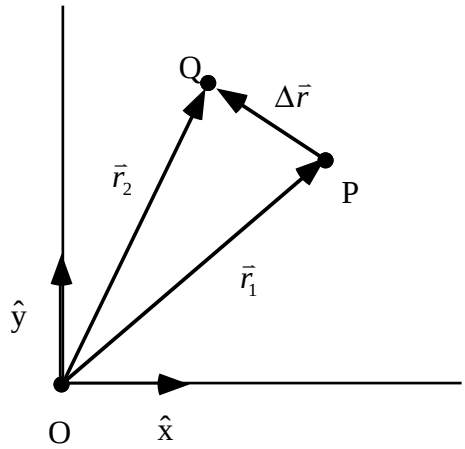
รูป 1.9.1

1.10 การกระจัดในรูปขององค์ประกอบ

เมื่ออนุภาคเปลี่ยนตำแหน่งจากจุด P (ซึ่งบอกด้วย $\vec{r}_1$) ที่เวลา t_1 ไปอยู่ที่จุด Q (ซึ่งบอกด้วย $\vec{r}_2$) ที่เวลา t_2 อนุภาคมีการกระจัด $\Delta\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$



รูป 1.10.1



รูป 1.10.2

ถ้าเราเลือกทิศ $\hat{x}$ และทิศ $\hat{y}$ เป็นทิศสองทิศที่ตั้งฉากกัน เราสามารถเขียนการกระจัดในรูปขององค์ประกอบได้ว่า

$$\vec{r}_1 = x_1\hat{x} + y_1\hat{y}, \quad \vec{r}_2 = x_2\hat{x} + y_2\hat{y}, \quad \Delta\vec{r} = \Delta r_x\hat{x} + \Delta r_y\hat{y}$$

เมื่อแทนค่าเหล่านี้ลงในสมการข้างบน เราจะได้ว่า

$$\Delta r_x\hat{x} + \Delta r_y\hat{y} = (x_2\hat{x} + y_2\hat{y}) - (x_1\hat{x} + y_1\hat{y}) = (x_2 - x_1)\hat{x} + (y_2 - y_1)\hat{y}$$

องค์ประกอบของการกระจัดซ้ายมือต้องเท่ากับทางขวามือ ดังนั้น

$$\Delta r_x = (x_2 - x_1) = \Delta x, \quad \Delta r_y = (y_2 - y_1) = \Delta y$$

2. ความเร็วเฉลี่ยและความเร็วขณะหนึ่ง

2.1 ความเร็วเฉลี่ย

เราใช้นิยามเดียวกับการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง นั่นคือ *ความเร็วเฉลี่ย* $\langle \vec{v} \rangle$ คือ*อัตราการเปลี่ยนตำแหน่งเทียบกับเวลา* หรือการกระจัดหารด้วยช่วงเวลาที่ใช้

$$\langle \vec{v} \rangle = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\Delta x \hat{\mathrm{x}} + \Delta y \hat{\mathrm{y}}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\hat{\mathrm{x}} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\hat{\mathrm{y}}$$

จะเห็นได้ว่าองค์ประกอบของความเร็วเฉลี่ยในทิศ $\hat{\mathrm{x}}$ และทิศ $\hat{\mathrm{y}}$ มีค่าเท่ากับ $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ และ $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ ตามลำดับ

2.2 ความเร็วขณะหนึ่ง

เช่นเดียวกับการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง ความเร็วที่เวลาขณะหนึ่งหาได้จากความเร็วเฉลี่ยเมื่อช่วงเวลาที่ใช้มีค่าเข้าหาศูนย์

$$\vec{v}(\text{ที่เวลา } T) = \frac{\vec{r}(\text{ที่เวลา } T + \Delta t) - \vec{r}(\text{ที่เวลา } T)}{\Delta t} \text{ เมื่อ } \Delta t \to 0$$

เมื่อเขียนให้อยู่ในรูปขององค์ประกอบในทิศ $\hat{\mathrm{x}}$ และทิศ $\hat{\mathrm{y}}$ สมการข้างบนกลายเป็น

$$\vec{v}(\text{ที่เวลา } T) = \frac{[x(\text{ที่เวลา } T + \Delta t) - x(\text{ที่เวลา } T)]\hat{\mathrm{x}}}{\Delta t} \text{ เมื่อ } \Delta t \to 0$$
$$+ \frac{[y(\text{ที่เวลา } T + \Delta t) - y(\text{ที่เวลา } T)]\hat{\mathrm{y}}}{\Delta t} \text{ เมื่อ } \Delta t \to 0$$

นั่นคือ องค์ประกอบของความเร็วในทิศ $\hat{\mathrm{x}}$ คือ $v_x(\text{ที่เวลา } T) = \frac{x(\text{ที่เวลา } T + \Delta t) - x(\text{ที่เวลา } T)}{\Delta t}$ เมื่อ $\Delta t \to 0$

และ องค์ประกอบของความเร็วในทิศ $\hat{\mathrm{y}}$ คือ $v_y(\text{ที่เวลา } T) = \frac{y(\text{ที่เวลา } T + \Delta t) - y(\text{ที่เวลา } T)}{\Delta t}$ เมื่อ $\Delta t \to 0$

เนื่องจากการกระจัดเป็นปริมาณเวกเตอร์ (มีกฎการบวกตามกฎการบวกปริมาณเวกเตอร์) และความเร็วคือการกระจัดต่อหนึ่งหน่วยเวลา ความเร็วจึงเป็นปริมาณเวกเตอร์ด้วย

3. ความเร่งเฉลี่ยและความเร่งขณะหนึ่ง

3.1 ความเร่งเฉลี่ย

ความเร่งเฉลี่ย $\vec{a}_{av}$ คืออัตราการเปลี่ยนแปลงความเร็วเทียบกับเวลา หรือความเร็วที่เปลี่ยนไปหารด้วยช่วงเวลา ถ้าที่เวลา t_1 อนุภาคมีความเร็ว $\vec{v}_1$ และที่เวลา t_2 ต่อมาอนุภาคมีความเร็ว $\vec{v}_2$ ความเร่งเฉลี่ยของ อนุภาคในช่วงเวลา t_1 ถึง t_2 คือ

$$\vec{a}_{av} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

3.2 ความเร่งขณะหนึ่ง

ในทำนองเดียวกับความเร็วขณะหนึ่ง เราให้นิยามความเร่งขณะหนึ่ง $\vec{a}$ ว่าคือความเร็วเฉลี่ยเมื่อช่วงเวลามีค่าเข้าหาศูนย์

$$\vec{a}(\text{ที่เวลา } T) = \frac{\vec{v}(\text{ที่เวลา } T + \Delta t) - \vec{v}(\text{ที่เวลา } T)}{\Delta t} \text{ เมื่อ } \Delta t \to 0$$

เช่นเดียวกับความเร็ว เราสามารถเขียนสมการบนในรูปขององค์ประกอบในทิศ $\hat{x}$ และทิศ $\hat{y}$ ได้

$$\vec{a}(\text{ที่เวลา } T) = \frac{[v_x(\text{ที่เวลา } T + \Delta t) - v_x(\text{ที่เวลา } T)]\hat{x}}{\Delta t} \text{ เมื่อ } \Delta t \to 0$$
$$+ \frac{[v_y(\text{ที่เวลา } T + \Delta t) - v_y(\text{ที่เวลา } T)]\hat{y}}{\Delta t} \text{ เมื่อ } \Delta t \to 0$$

นั่นคือ องค์ประกอบของความเร่งในทิศ $\hat{x}$ คือ

$$a_x(\text{ที่เวลา } T) = \frac{v_x(\text{ที่เวลา } T + \Delta t) - v_x(\text{ที่เวลา } T)}{\Delta t} \text{เมื่อ } \Delta t \to 0$$

และ องค์ประกอบของความเร่งในทิศ $\hat{y}$ คือ

$$a_y(\text{ที่เวลา } T) = \frac{v_y(\text{ที่เวลา } T + \Delta t) - v_y(\text{ที่เวลา } T)}{\Delta t} \text{เมื่อ } \Delta t \to 0$$

3.3 สมการของการเคลื่อนที่ในระนาบด้วยความเร่งคงที่

เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงที่ องค์ประกอบของความเร่งในทิศ $\hat{x}$ และทิศ $\hat{y}$ ใด ๆ ที่ตั้งฉากกันมีค่าคงที่ด้วย อนุภาคจะมีการกระจัดไปในทิศ $\hat{x}$ และทิศ $\hat{y}$ อย่างเป็นอิสระต่อกันแต่พร้อมกัน *การเคลื่อนที่ซึ่งเกิดขึ้นจริง ๆ สามารถมองได้ว่าประกอบด้วยการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงสองแนวที่ตั้งฉากกันพร้อม ๆ กัน* ความสัมพันธ์ระหว่างการกระจัด ความเร็ว และความเร่งในแต่ละแนวเป็นดังนี้

$$v_x = u_x + a_x\Delta t, \quad \bar{v}_x = \tfrac{1}{2}(u_x + v_x) \qquad v_y = u_y + a_y\Delta t, \quad \bar{v}_y = \tfrac{1}{2}(u_y + v_y)$$

$$\Delta x = \bar{v}_x\Delta t, \quad \Delta x = u_x\Delta t + \tfrac{1}{2}a_x(\Delta t)^2 \qquad \Delta y = \bar{v}_y\Delta t, \quad \Delta y = u_y\Delta t + \tfrac{1}{2}a_y(\Delta t)^2$$

$$v_x^2 = u_x^2 + 2a_x\Delta x \qquad v_y^2 = u_y^2 + 2a_y\Delta y$$