การเคลื่อนที่

ทำไมเราจึงสนใจการเคลื่อนที่

เราสนใจการเคลื่อนที่ เพราะว่า

1. การเคลื่อนที่เป็นส่วนหนึ่งของชีวิต เมื่อเรามองไปรอบ ๆ เราจะเห็นการเคลื่อนที่ตลอดเวลา คนเดินไปมา รถแล่น น้ำไหล ฝนตก ลมพัด เมฆลอยผ่านไป การเคลื่อนที่ของดาวเทียมรอบโลก ภายในร่างกายก็มีการเคลื่อนที่ตลอดเวลา ลมหายใจเข้าออก การไหลของเลือด

2. การเคลื่อนที่เป็นพื้นฐานของปรากฏการณ์หลายๆ อย่าง ถ้าเราไล่ดูไปเรื่อย ๆ ถึงขั้นพื้นฐาน เราจะพบว่าปรากฏการณ์ต่าง ๆ เกิดจากการเคลื่อนที่ของอนุภาคหรือคลื่นอย่างใดอย่างหนึ่ง

3. ความรู้เรื่องการเคลื่อนที่ทำให้เราสามารถทำนายบางสิ่งได้ว่าต่อไปจะเกิดอะไรขึ้น ทำให้เราสามารถหลีกเลี่ยง เปลี่ยนแปลง หรือควบคุมปรากฏการณ์หลายอย่างได้ เราสามารถส่งจรวดและยานสำรวจไปยังดาวอังการที่อยู่ห่างไกลได้เพราะเรารู้กฎการเคลื่อนที่ซึ่งทำให้เราสามารถควบคุมการเคลื่อนที่ของยานได้

4. การศึกษาลักษณะการเคลื่อนที่ของวัตถุ สิ่งที่ทำให้วัตถุเคลื่อนที่ และสิ่งอื่นที่เกี่ยวข้องซึ่งเราจะศึกษาต่อไป เช่น แรง มวล พลังงาน โมเมนตัม เป็นสาขาหนึ่งของฟิสิกส์ที่เราเรียกรวมกันว่ากลศาสตร์ หลักการเกี่ยวกับโมเมนตัม แรง และพลังงานเป็นหลักพื้นฐานสำคัญ และเป็น"ภาษา"ที่ใช้ในการศึกษาฟิสิกส์และวิทยาศาสตร์สาขาอื่น ๆ

เราอาจแบ่งการศึกษาการเคลื่อนที่ออกเป็นสองส่วนหลัก ๆ คือ

1. จลนศาสตร์ เป็นการบรรยายการเคลื่อนที่โดยที่เราไม่สนใจว่าอะไรเป็นสาเหตุของการเคลื่อนที่ อะไรทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงลักษณะการเคลื่อนที่ เราสนใจแต่ว่าวัตถุหรืออนุภาคเคลื่อนที่อย่างไร ถ้าวัตถุเคลื่อนที่ในลักษณะนั้น ๆ แล้ว ต่อไปวัตถุจะอยู่ที่ไหน จะไปถึงเร็วเท่าใด และอื่น ๆ

2. พลศาสตร์ เป็นการศึกษาเกี่ยวกับต้นเหตุของการเคลื่อนที่ การเปลี่ยนแปลงการเคลื่อนที่ และกฎการเคลื่อนที่

เราอาจมองได้ว่าการเคลื่อนที่ของวัตถุโดยทั่วไปนั้นเป็นการเคลื่อนที่สองแบบง่าย ๆ ผสมกัน คือ

1. การเคลื่อนที่แบบเลื่อนตำแหน่ง เป็นการเคลื่อนที่ซึ่งแต่ละส่วนของวัตถุเคลื่อนมีการกระจัดเหมือนกันหมด

2. การเคลื่อนที่แบบหมุน เป็นการเคลื่อนที่ซึ่งอย่างน้อยจุด ๆ หนึ่งของวัตถุอยู่กับที่ ในการเคลื่อนที่แบบนี้วัตถุมีลักษณะการวางตัวเปลี่ยนไป

ในการศึกษาทางวิทยาศาสตร์ทั่วไปเราเริ่มจากระบบที่มีลักษณะง่าย ๆ ก่อน แล้วจึงค่อยตามด้วยระบบที่มีลักษณะซับซ้อนเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ

ระบบที่ง่ายที่สุดคืออนุภาค ในแง่ของการเคลื่อนที่เราถือว่าอนุภาคเป็นจุด มีตำแหน่งที่แน่นอน แต่ไม่มีขนาด ถ้าเราสนใจสมบัติอย่างอื่นเราจะค่อย ๆ ให้อนุภาคของเรามีสมบัตินั้น ๆ เพิ่มขึ้นภายหลัง เช่น ให้มีมวล ประจุไฟฟ้า และอื่น ๆ

นอกจากนี้การศึกษาเกี่ยวกับอนุภาคสามารถเอาไปดัดแปลงใช้กับวัตถุจริงได้ ในการพิจารณาการเคลื่อนที่ของรถยนต์ เราอาจเลือกจุด ๆ หนึ่งบนตัวรถเป็นจุดแทนตำแหน่งของรถ ในบางสถานการณ์เราประมาณวัตถุว่าเป็นอนุภาคได้ เช่น ในการพิจารณาการเคลื่อนที่ของโลกรอบดวงอาทิตย์ ถ้าเราไม่สนใจการหมุนรอบตัวเอง เราอาจถือว่าโลกเป็นอนุภาคได้เพราะขนาดของโลกเล็กมากเมื่อเทียบกับระยะห่างระหว่างโลกและดวงอาทิตย์

ในชีวิตจริงการเคลื่อนที่เป็นการเคลื่อนที่ในสามมิติซึ่งซับซ้อน แต่เราจะเริ่มศึกษาจากกรณีที่ง่ายก่อน คือกรณีที่อนุภาคเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงอย่างเดียว เราจะพบว่าการเคลื่อนที่ในระนาบสองมิติและในสามมิติทั่วไปอาจถือได้ว่าประกอบด้วยการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงสองหรือสามแนวที่ตั้งฉากกันไปพร้อมกัน ดังนั้นการเคลื่อนที่ในหนึ่งมิติจึงเป็นพื้นฐานของการเคลื่อนที่ทั่วไป ถ้าเราเข้าใจการเคลื่อนที่ในหนึ่งมิติได้ดี คิดได้อย่างมีขั้นตอน การศึกษาการเคลื่อนที่ทั่วไปก็จะง่าย

จลนศาสตร์ในแนวเส้นตรง

0. บทนำ

ในบทนี้เราเริ่มต้นศึกษาวิธีการบรรยายการเคลื่อนที่ในลักษณะต่าง ๆ และจะเริ่มจากการเคลื่อนที่แบบง่ายที่สุดก่อน นั่นคือการเคลื่อนที่ของอนุภาคในแนวเส้นตรง เราจะพิจารณาการบอกตำแหน่ง การเปลี่ยนตำแหน่ง อัตราการเปลี่ยนตำแหน่งหรือความเร็ว ความเร่ง และเราจะพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณเหล่านี้ในการเคลื่อนที่ลักษณะต่าง ๆ

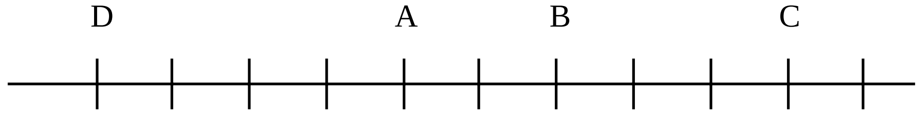
1. ตำแหน่งและการกระจัด

1.1 การบอกตำแหน่ง

ก่อนที่จะบอกได้ว่าอนุภาคมีการเคลื่อนที่อย่างไร เราต้องรู้วิธีบอกตำแหน่งก่อน ในการบอกตำแหน่งทุกครั้งเราต้อง

1. บอกเทียบกับจุดอ้างอิง ดังนั้นก่อนอื่นเราต้องเลือกจุดอ้างอิง ซึ่งเราเลือกตามสะดวก
2. บอกว่าจุดที่เราสนใจมีการเคลื่อนที่อยู่ในแนวไหน เช่น แนวตะวันตก-ตะวันออก หรือเหนือ-ใต้
3. อยู่ทางไหนของจุดอ้างอิง ขวาหรือซ้าย และ
4. อยู่ห่างจากจุดอ้างอิงเป็นระยะทางเท่าไร

ตัวอย่างที่ 1.1



รูปที่ 1.1.1

สมมุติว่ารูปที่ 1.1.1 แสดงเส้นทางในแนวตะวันตก-ตะวันออก เพื่อความสะดวก เราจะเรียกแนวแกนนี้ว่าแกน X ถ้าเราเลือก A เป็นจุดอ้างอิง จะได้ว่า

B อยู่ทางตะวันออกของ A ในแนวแกน X เป็นระยะทาง 2 หน่วย

C อยู่ทางตะวันออกของ A ในแนวแกน X เป็นระยะทาง 5 หน่วย

D อยู่ทางตะวันตกของ A ในแนวแกน X เป็นระยะทาง 4 หน่วย

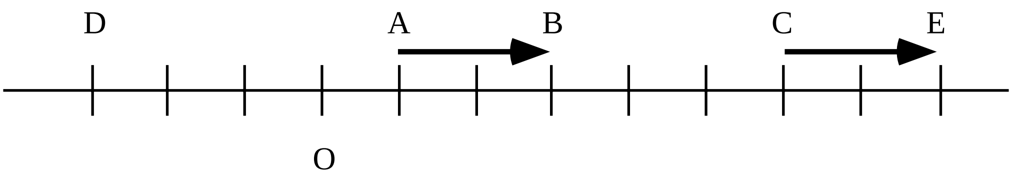
แต่ถ้าเราเลือกให้ B เป็นจุดอ้างอิง เราจะได้ว่า C อยู่ทางตะวันออกของ B ในแนวแกน X เป็นระยะทาง 3 หน่วย เราเห็นได้ว่าตัวเลขที่ใช้บอกตำแหน่งมีค่าขึ้นกับจุดอ้างอิงที่เราเลือก ดังนั้นในการบอกตำแหน่งทุกครั้งเราต้องบอกจุดอ้างอิงที่เราใช้ด้วย

โดยทั่วไปเมื่อเรารู้ว่าการเคลื่อนที่อยู่ในแนวใดแล้ว เรามักละการบอกแนวไว้ในฐานที่เข้าใจ

1.2 การเปลี่ยนตำแหน่งหรือการกระจัด

หลังจากที่เรารู้วิธีบอกตำแหน่งแล้ว ขั้นตอนต่อไปคือการบอกการเปลี่ยนตำแหน่ง ในรูปที่ 1.2.1 ถ้าอนุภาคเปลี่ยนตำแหน่งจาก A ไป B เราต้องบอกว่าการเปลี่ยนตำแหน่งนั้นไปทางทิศตะวันออกของ A ในแนวแกน X เป็นระยะทาง 2 หน่วย ฉะนั้นจริง ๆ แล้ว การบอกการเปลี่ยนตำแหน่งก็เหมือนกับการบอกตำแหน่ง คือต้องบอกว่าเปลี่ยนจากจุดไหน (จุดอ้างอิง) ไปทางไหน (ทิศ) ของแนวใดเป็นระยะทางเท่าไร แต่บ่อยครั้งที่เราสนใจเพียงแต่ว่าอนุภาคเคลื่อนที่ไปทางไหนของแนวใด เป็นระยะเท่าไร โดยที่ไม่สนใจจุดตั้งต้น เราเรียกการเปลี่ยนตำแหน่งนี้ว่าการกระจัด

การกระจัดที่มีขนาดเท่ากันและมีทิศเดียวกันถือว่ามีค่าเท่ากันหรือเป็นการกระจัดเดียวกัน ในรูปข้างล่าง การกระจัดจาก A ไป B มีค่าเท่ากับการกระจัดจาก C ไป E



รูปที่ 1.2.1 - ใช้ลูกศรแสดงการเปลี่ยนตำแหน่ง

เราสามารถแทนการเปลี่ยนตำแหน่งหรือการกระจัดได้ด้วยลูกศร (และแทนตำแหน่งด้วยลูกศรที่ชี้ออกจากจุดอ้างอิง) ขนาดความยาวของลูกศรแปรตรงกับขนาดการกระจัด และทิศของลูกศรชี้ทิศของการกระจัด ในรูปที่แสดงตำแหน่งของจุดต่าง ๆ เช่น รูปที่ 1.2.1 ลูกศรที่แทนการกระจัดจาก A ไป B คือเส้นตรงที่ลากจากจุด A ไปจุด B โดยมีหัวลูกศรชี้ออกจาก A ไปหา B

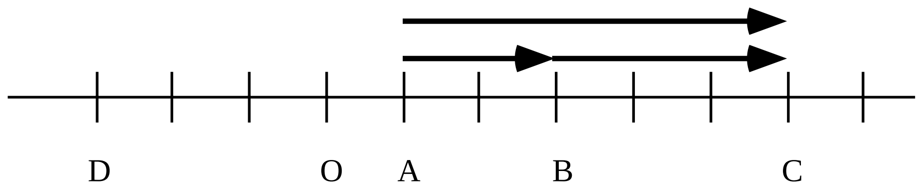
1.3 การบวกการกระจัดและการใช้สัญลักษณ์และเครื่องหมายบวกลบแทนทิศ

ถ้าเราสนใจเพียงแต่ว่าเราเปลี่ยนตำแหน่งไปทางไหนของแนวใด เป็นระยะทางเท่าไร เราเห็นได้ทันทีว่าการเปลี่ยนตำแหน่งจาก A ไป B แล้วเปลี่ยนตำแหน่งต่อจาก B ไป C มีค่าเทียบเท่ากับการเปลี่ยนตำแหน่งจาก A ไป C โดยตรง

เราเขียนผลของการทำการกระจัดติดต่อกันว่ามีผลเท่าเทียมกับการทำการกระจัดทีเดียวออกมาในรูปของ "สมการ" ได้ดังนี้:

การกระจัดจาก A ไป B ต่อด้วย การกระจัดจาก B ไป C มีค่าเท่าเทียมกับการกระจัดจาก A ไป C

เราแทนการเปลี่ยนตำแหน่งติดต่อกันด้วยลูกศรที่ลากต่อกันไปโดยให้หางของการกระจัดที่สองต่อออกจากหัวลูกศรที่แทนการกระจัดที่หนึ่ง การกระจัดลัพธ์จะแทนด้วยลูกศรที่ลากจากจุดแรกไปยังจุดสุดท้าย ดังรูปที่ 1.3.1 ข้างล่างนี้



รูปที่ 1.3.1

พิจารณาการเปลี่ยนตำแหน่งในแนวตะวันตก-ตะวันออกต่อไปนี้ จากรูป เราเห็นได้ทันทีว่า

ไป 2 m ทางตะวันออก แล้วต่อด้วย ไป 3 m ทางทิศตะวันออก มีค่าเท่ากับ ไป 5 m ทางทิศตะวันออก

ไป 2 m ทางตะวันออก แล้วต่อด้วย ไป 0.5 m ทางทิศตะวันตก มีค่าเท่ากับ ไป 1.5 m ทางทิศตะวันออก

การเขียนเป็นคำพูดแบบนี้ก็ค่อนข้างยืดยาด เพื่อเขียนให้กระชับขึ้นเราจะใช้สัญลักษณ์แทนคำพูด สัญลักษณ์ของเราจะต้องแทนทั้งทิศการเคลื่อนที่และขนาดของระยะทาง นอกจากนั้นเราต้องมีสัญลักษณ์แทน "แล้วต่อด้วย" และ "มีค่าเท่ากับ"

ให้เราแทน "ไปทางทิศตะวันออก 2 m" ด้วย 2 m E และ "ไปทางทิศตะวันตก 3 m" ด้วย 3 m W นั่นคือใช้ E แทนทิศตะวันออก และ W แทนทิศตะวันตก นอกจากนั้นเราจะแทน "แล้วต่อด้วย" ด้วย + และแทน "มีค่าเท่ากับ" ด้วย =

โดยการใช้สัญลักษณ์ดังกล่าว เราสามารถแทนการเปลี่ยนตำแหน่งข้างบนได้ด้วย"สมการ"ต่อไปนี้

$$2\text{ m E} + 3\text{ m E} = 5\text{ m E}$$

$$2\text{ m E} + 0.5\text{ m W} = 1.5\text{ m E}$$

ก่อนอื่นสังเกตว่าเมื่อการเดินทางไปทางเดียวกัน ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าเท่ากับไปทางนั้นด้วยระยะทางที่เป็นผลบวกของระยะทางทั้งสอง แต่เมื่อการเดินทางทั้งสองสวนทางกัน ผลลัพธ์ที่ได้มีค่าเท่ากับการเดินทางไปเป็นระยะทางเท่ากับผลต่างของระยะทางทั้งสองและไปทางด้านที่มีระยะทางมากกว่า นั่นคือเมื่อการเคลื่อนที่ไปทางเดียวกันเราคิดเหมือนกับเป็นการบวกเลขธรรมดา

$$2\text{ m E} + 3\text{ m E} = 5\text{ m E} = (2\text{ m} + 3\text{ m})\text{ E}$$

แต่เมื่อการเคลื่อนที่สวนทางกัน เราคิดเหมือนกับเอาตัวเลขลบกันดังนี้

$$2\text{ m E} + 0.5\text{ m W} = 1.5\text{ m E} = (2\text{ m} - 0.5\text{ m})\text{ E}$$

ถ้าเรากระจายวงเล็บขวามือสุดของสมการข้างบนออกมาเหมือนกับว่าเป็นการ"คูณ"กับ E เราจะได้ว่า

$$(2\ \mathrm{m} - 0.5\ \mathrm{m})\ \mathrm{E} = 2\ \mathrm{m\ E} - 0.5\ \mathrm{m\ E}$$

เราจะต้องให้ความหมายกับปริมาณทางขวามือของสมการซึ่งดูเหมือนกับเป็นการลบการกระจัดสองการกระจัด ซึ่งเรายังไม่รู้ว่าคืออะไร ถ้าเราพยายามมองนิพจน์ทางขวามือของสมการให้อยู่ในรูปของการทำการกระจัดสองการกระจัดติดต่อกัน เราอาจแปลว่า $2\ \mathrm{m\ E} - 0.5\ \mathrm{m\ E}$ คือ $2\ \mathrm{m\ E} + (-0.5\ \mathrm{m})\ \mathrm{E}$ ซึ่งเราก็ยังไม่รู้อีกเช่นกันว่า $(-0.5\ \mathrm{m})\ \mathrm{E}$ คืออะไร (แต่เราจะทำเหมือนกับว่าเรารู้ไปก่อน!) ดังนั้น

$$2\ \mathrm{m\ E} + 0.5\ \mathrm{m\ W} = 1.5\ \mathrm{m\ E} = (2\ \mathrm{m} - 0.5\ \mathrm{m})\ \mathrm{E} = 2\ \mathrm{m\ E} - 0.5\ \mathrm{m\ E} = 2\ \mathrm{m\ E} + (-\ 0.5\ \mathrm{m})\ \mathrm{E}$$

เมื่อเทียบด้านซ้ายสุดกับด้านขวาสุดของสมการ จะเห็นได้ว่าเราควรให้นิยามว่า $0.5\ \mathrm{m\ W} = (-0.5\ \mathrm{m})\ \mathrm{E}$

ดังนั้นเราต้องแปลว่า $2\ \mathrm{m\ E} - 0.5\ \mathrm{m\ E} = 2\ \mathrm{m\ E} + 0.5\ \mathrm{m\ W}$ นั่นคือ

การลบการกระจัดเป็นการบวกด้วยการกระจัดที่มีทิศตรงข้าม

และ การกระจัดที่มีเครื่องหมายลบอยู่ข้างหน้าคือการกระจัดที่มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศตรงกันข้าม

เพื่อเป็นการตรวจสอบว่าการให้นิยามแบบนี้สอดคล้องกับกรณีอื่นหรือไม่ ขอให้เราพิจารณาการเปลี่ยนตำแหน่ง "ไปทางตะวันออก 2 m แล้วตามด้วยการกระจัดไปทางตะวันตก 3 m" การกระจัดทั้งหมดนี้มีค่ารวมเท่ากับไปทางตะวันตก 1 m เราเขียนการทำการกระจัดทั้งหมดนี้ในรูปสัญลักษณ์ได้ว่า

$$2\ \mathrm{m\ E} + 3\ \mathrm{m\ W} = 1\ \mathrm{m\ W}$$

เมื่อเราแทน $3\ \mathrm{m\ W}$ ด้วย $(-\ 3\ \mathrm{m})\ \mathrm{E}$ ทางซ้ายมือของสมการ เราจะได้ว่า

$$2\ \mathrm{m\ E} + 3\ \mathrm{m\ W} = 2\ \mathrm{m\ E} + (-\ 3\ \mathrm{m})\ \mathrm{E} = (2\ \mathrm{m} - 3\ \mathrm{m})\ \mathrm{E} = (-1\ \mathrm{m})\ \mathrm{E}$$

ถ้าเราแทน $(-1\ \mathrm{m})\ \mathrm{E}$ ด้วย $1\ \mathrm{m\ W}$ เราจะได้ว่า $2\ \mathrm{m\ E} + 3\ \mathrm{m\ W} = 1\ \mathrm{m\ W}$ ตามที่ควรเป็น

ดังนั้นเราจะให้นิยามว่า

$$\boxed{(-a\ \mathrm{m})\ \mathrm{E} \equiv a\ \mathrm{m\ W}}$$

โดยที่ a คือเลขจำนวนจริงใด ๆ

โดยการพิจารณาในทำนองเดียวกันนี้ เราสรุปได้เหมือนกันว่า $\boxed{(-a\ \mathrm{m})\ \mathrm{W} \equiv a\ \mathrm{m\ E}}$

เพื่อความสะดวกในการใช้งานต่อไปภายหลัง เขามักตกลงเขียน W และ E อีกอย่างหนึ่งว่า

$$\mathrm{W} \equiv (-\mathrm{E}) \qquad \text{และ} \qquad \mathrm{E} \equiv (-\mathrm{W})$$

(ด้วยเหตุนี้ บางทีเราเรียกทิศตรงข้ามกันว่าเป็นทิศลบ เช่น ทิศตะวันตกเป็นทิศลบของทิศตะวันออก)

ดังนั้น สมการ $(-a\ \mathrm{m})\ \mathrm{E} \equiv a\ \mathrm{m}\ \mathrm{W}$ และ $(-a\ \mathrm{m})\ \mathrm{W} \equiv a\ \mathrm{m}\ \mathrm{E}$) จึงกลายเป็น

$$(-a\ \mathrm{m})\ \mathrm{E} \equiv a\ \mathrm{m}\ (-\mathrm{E}) \quad \text{และ} \quad (-a\ \mathrm{m})\ \mathrm{W} \equiv a\ \mathrm{m}\ (-\mathrm{W})$$

สมการนี้ทำให้เราสามารถทำเหมือนกับว่า เราจะเขียนเครื่องหมายลบติดกับทิศ หรือติดกับตัวเลขซึ่งเป็นขนาดของการ กระจัดก็ได้ แล้วแต่ความสะดวก

ตัวอย่าง 1.3.1

โดยการใช้สัญลักษณ์ตามที่เราตกลงกัน จงแสดงให้เห็นว่าการกระจัดไปทางทิศตะวันตก $2\ \mathrm{m}$ แล้วต่อด้วยการกระจัดไปทางทิศตะวันออก $3\ \mathrm{m}$ มีค่าเท่ากับการกระจัดไปทางทิศตะวันออก $1\ \mathrm{m}$

วิธีทำ

ในรูปของสัญลักษณ์ การกระจัดที่ต้องการคือ

$$2\ \mathrm{m}\ \mathrm{W} + 3\ \mathrm{m}\ \mathrm{E} = (-2\ \mathrm{m})\ \mathrm{E} + 3\ \mathrm{m}\ \mathrm{E} = ((-2\ \mathrm{m}) + 3\ \mathrm{m})\ \mathrm{E} = 1\ \mathrm{m}\ \mathrm{E}$$

หรือ

$$2\ \mathrm{m}\ \mathrm{W} + 3\ \mathrm{m}\ \mathrm{E}$$

$$= 2\ \mathrm{m}\ \mathrm{W} + 3\ \mathrm{m}\ (-\mathrm{W}) = 2\ \mathrm{m}\ \mathrm{W} + (-3\ \mathrm{m})\ \mathrm{W} = (2\ \mathrm{m} - 3\ \mathrm{m})\ \mathrm{W} = (-1\ \mathrm{m})\ \mathrm{W}$$

$$= 1\ \mathrm{m}\ (-\mathrm{W}) = 1\ \mathrm{m}\ \mathrm{E}$$

1.4 การแทนการกระจัดและตำแหน่งด้วยสัญลักษณ์ - เวกเตอร์

ในหัวข้อ 1.3 เราพิจารณาการเคลื่อนที่ในแนวตะวันตก-ตะวันออก แต่ผลที่ได้จะใช้กับการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงแนวใดก็ได้ ไม่ว่าจะเป็นแนวเหนือ-ใต้ แนวดิ่ง หรือแนวนอน ในแต่ละแนวจะมีทิศสองทิศซึ่งเป็นทิศที่ตรงข้ามกัน เช่น ขึ้นกับลง หรือขวากับซ้าย ถ้าเราเลือกทิศหนึ่งเป็นทิศอ้างอิง เราจะเรียกทิศที่ตรงข้ามว่าเป็นทิศลบ เราจะใช้สัญลักษณ์ต่อไปนี้ในการบอกการเคลื่อนที่:

ให้แนวการเคลื่อนที่เป็นแนวแกน X ให้ทิศอ้างอิงแทนด้วย $\hat{\mathrm{x}}$ การกระจัดในแนว X อาจไปทางเดียวกับทิศ $\hat{\mathrm{x}}$ หรือไปทางทิศตรงข้ามกับทิศ $\hat{\mathrm{x}}$ ก็ได้ เราเขียนการกระจัด 5 หน่วยไปทางทิศ $\hat{\mathrm{x}}$ ว่า $5\,\hat{\mathrm{x}}$ และการกระจัด 3 หน่วยไปทางทิศตรงข้ามกับทิศ $\hat{\mathrm{x}}$ เขียนว่า $3(-\hat{\mathrm{x}})$ หรือ $(-3)\,\hat{\mathrm{x}}$

ดังนั้นเราอาจเขียนการกระจัดใด ๆ ในแนวแกน X ว่า $a\hat{\mathrm{x}}$ โดยที่ a เป็นเลขจำนวนจริงซึ่งอาจมีค่าเป็นบวกหรือลบก็ได้ a เป็นตัวอย่างของปริมาณสเกลาร์ ถ้า a เป็นบวก $a\hat{\mathrm{x}}$ คือการกระจัดไปทางทิศ $\hat{\mathrm{x}}$ เป็นระยะทาง a แต่ถ้า a เป็นลบ $a\hat{\mathrm{x}}$ คือการกระจัดไปทางทิศ $(-\hat{\mathrm{x}})$ เป็นระยะทาง $|a|$ ($|a|$ คือขนาดของ a)

การกระจัดเป็นตัวอย่างหนึ่งของปริมาณเวกเตอร์ ดังนั้น $a\hat{\mathrm{x}}$ เป็นปริมาณเวกเตอร์ เราจะใช้สัญลักษณ์ $\vec{A}$ แทนปริมาณเวกเตอร์ เราสามารถเขียน $\vec{A}$ ได้ 2 แบบ คือ

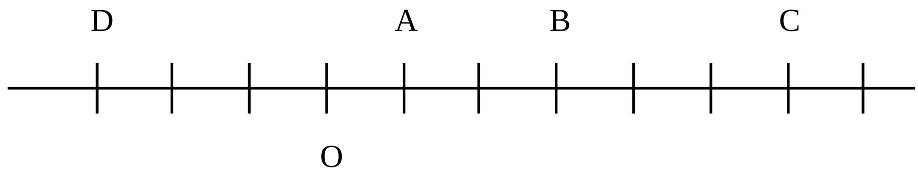
1. เขียนในรูปขนาดและทิศของ $\vec{A}$ เป็น $\vec{A} = |\vec{A}|\hat{A}$

โดยที่เราได้ใช้สัญลักษณ์ $|\vec{A}|$ และ $\hat{A}$ แทนขนาดและทิศของเวกเตอร์ $\vec{A}$ ตามลำดับ สังเกตว่าในกรณีที่ $\vec{A}$ เป็นเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย นั่นคือ $|\vec{A}|$ มีขนาดเท่ากับ 1 เราจะได้ว่า $\vec{A} = \hat{A}$ ดังนั้น $\hat{A}$ คือเวกเตอร์ที่มีขนาดหนึ่งหน่วย เราเรียก $\hat{A}$ ว่าเวกเตอร์หนึ่งหน่วย

2. เขียนในรูปของปริมาณสเกลาร์กับทิศอ้างอิงว่า $\vec{A} = A\hat{\mathrm{x}}$

A คือปริมาณสเกลาร์ บางทีก็เรียก A ว่าองค์ประกอบของ $\vec{A}$ ในทิศ $\hat{\mathrm{x}}$ สังเกตว่าทิศของ $\vec{A}$ ไม่จำเป็นต้องมีทิศเดียวกับทิศ $\hat{\mathrm{x}}$ ถ้า A เป็นบวก $\vec{A}$ มีทิศเดียวกับ $\hat{\mathrm{x}}$ แต่ถ้า A เป็นลบ $\vec{A}$ มีทิศ $(-\hat{\mathrm{x}})$

จากข้อสังเกตที่ว่า การบอกตำแหน่งเหมือนกับการบอกการกระจัด ทำให้เราสามารถใช้ปริมาณเวกเตอร์บอกตำแหน่งเทียบกับจุดอ้างอิงได้ เรามักใช้สัญลักษณ์ $\vec{x}$ แทนตำแหน่งในแนวแกน X และเขียนตัวหนังสือห้อยบอกว่าเป็นตำแหน่งของจุดใด เช่น $\vec{x}_{\mathrm{P}}$ แทนตำแหน่งของ P และใช้ x หรือ x_{P} แทนองค์ประกอบของ $\vec{x}$ หรือ $\vec{x}_{\mathrm{P}}$ ในทิศอ้างอิงตามลำดับ



รูปที่ 1.4.1

ในรูปที่ 1.4.1 ถ้าให้ $\hat{\mathrm{x}}$ เป็นทิศอ้างอิงชี้ไปทางขวามือ ตำแหน่งของ A, B, C และ D จากจุดอ้างอิง O คือ $\vec{x}_{\mathrm{A}} = +1\,\hat{\mathrm{x}}$, $\vec{x}_{\mathrm{B}} = +3\,\hat{\mathrm{x}}$, $\vec{x}_{\mathrm{C}} = +6\,\hat{\mathrm{x}}$ และ $\vec{x}_{\mathrm{D}} = 3\,(-\hat{\mathrm{x}}) = (-3)\,\hat{\mathrm{x}}$

ในกรณีที่รู้กันว่าทิศอ้างอิงคือทิศใด เขามักจะละทิศอ้างอิงไว้ในฐานที่เข้าใจ และเขียนบอกเฉพาะองค์ประกอบของเวกเตอร์ในทิศอ้างอิงนั้น เช่น $x_{\mathrm{A}} = +1$, $x_{\mathrm{B}} = +3$, $x_{\mathrm{C}} = +6$ และ $x_{\mathrm{D}} = -3$ จากค่าขององค์ประกอบเรารู้ได้ว่า ตำแหน่งของจุดที่สนใจอยู่ทางไหนของจุดอ้างอิงและอยู่ห่างเป็นระยะทางเท่าใด โดยดูจากเครื่องหมายและขนาดขององค์ประกอบ ถ้าเครื่องหมายเป็นบวก จุดนั้นอยู่ในทิศเดียวกับทิศอ้างอิง แต่ถ้าเครื่องหมายเป็นลบ จุดนั้นอยู่ในทิศตรงข้ามกับทิศอ้างอิง ส่วนระยะทางนั้นมีขนาดเท่ากับขนาดขององค์ประกอบ จะเห็นได้ว่าเราสามารถใช้เครื่องหมายแทนทิศได้

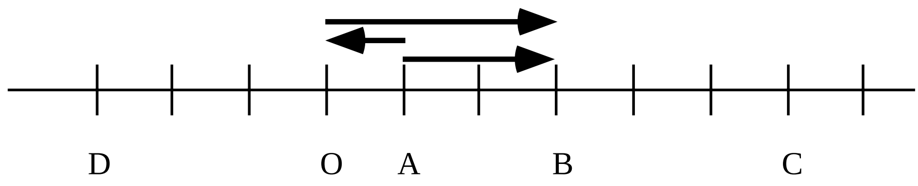
1.5 การหาการกระจัดจากตำแหน่ง

สมมุติว่าเรารู้ตำแหน่งของจุดต่าง ๆ เทียบกับจุดอ้างอิง O ในรูปของปริมาณเวกเตอร์ และเราต้องการหาการกระจัดจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่ง เช่น การกระจัดจาก A ไป B เราจะทำอย่างไร

ให้ $\hat{x}$ เป็นทิศอ้างอิง สมมุติว่าตำแหน่งของ A และ B จากจุดอ้างอิง O แทนด้วย

$$\overrightarrow{OA} = \vec{x}_A = x_A\hat{x} \qquad \text{และ} \qquad \overrightarrow{OB} = \vec{x}_B = x_B\hat{x}$$

ตามลำดับ โดยที่เราได้ใช้สัญลักษณ์ $\overrightarrow{OA}$ และ $\overrightarrow{OB}$ แทนการกระจัดจาก O ไป A และการกระจัดจาก O ไป B ตามลำดับ พิจารณาการกระจัดจาก A ไป B แทนที่เราจะเปลี่ยนตำแหน่งจาก A ไป B โดยตรง เราเดินทางจาก A ไปจุดอ้างอิง O ก่อน แล้วค่อยเดินทางจากจุดอ้างอิง O ไป B (ดูรูปที่ 1.5.1)



รูปที่ 1.5.1

ในรูปของปริมาณเวกเตอร์เราเขียนได้ว่า

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}$$

โดยที่ $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AO}$ และ $\overrightarrow{OB}$ คือการกระจัดจาก A ไป B, จาก A ไป O และจาก O ไป B ตามลำดับ แต่ $\overrightarrow{AO}$ เป็นการกระจัดที่มีขนาดเท่ากับขนาดของการกระจัดจาก O ไป A แต่มีทิศตรงข้าม ดังนั้น $\overrightarrow{AO} = \left(-\overrightarrow{OA}\right)$ และเราเขียนสมการข้างบนได้ใหม่ว่า

$$\overrightarrow{AB} = \left(-\overrightarrow{OA}\right) + \overrightarrow{OB}$$

แต่ $\overrightarrow{AO} = \left(-\overrightarrow{OA}\right) = x_A(-\hat{x}) = -x_A(\hat{x})$ ดังนั้นเราได้ว่า

$$\overrightarrow{AB} = (-x_A)\hat{x} + x_B\hat{x} = (-x_A + x_B)\,\hat{x} = (x_B - x_A)\,\hat{x} = x_B\hat{x} - x_A\hat{x} = \vec{x}_B - \vec{x}_A$$

นั่นคือ

$$\overrightarrow{AB} = \vec{x}_B - \vec{x}_A$$

สังเกตว่าองค์ประกอบของ $\overrightarrow{AB}$ ในทิศ $\hat{x}$ คือ $x_B - x_A$ ดังนั้นเราสามารถใช้ $x_B - x_A$ แทนการกระจัดจาก A ไป B ได้เมื่อเรารู้ว่าทิศอ้างอิงคือทิศ $\hat{x}$

เพื่อความสะดวกและความกระชับในการเขียนและการคำนวณที่จะทำต่อภายหลัง เราจะใช้สัญลักษณ์แทนคำพูดยาว ๆ โดยที่เราจะใช้สัญลักษณ์ Δ แทนการเปลี่ยนแปลง ซึ่งเราจะให้เป็นของใหม่"ลบ"ด้วยของเก่าเสมอ และเนื่องจากเราใช้ $\vec{x}$ แทนตำแหน่ง เราจะใช้ $\Delta\vec{x}_{A\to B}$ แทนการเปลี่ยนตำแหน่งหรือการกระจัดจาก A ไป B นั่นคือ

$$\Delta\vec{x}_{A\to B} \equiv \text{ การเปลี่ยนตำแหน่งจาก A ไป B}$$

(เครื่องหมาย $\equiv$ บอกให้รู้ว่านี่คือนิยาม)

เพราะฉะนั้น $$\Delta\vec{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \vec{x}_{\mathrm{B}} - \vec{x}_{\mathrm{A}}$$

ในรูปของสัญลักษณ์ใหม่นี้ เราสามารถเขียนสมการการบวกการกระจัดที่ว่า

การกระจัดจาก A ไป B ต่อด้วย การกระจัดจาก B ไป C มีค่าเท่าเทียมกับการกระจัดจาก A ไป C

เป็น $$\Delta\vec{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} + \Delta\vec{x}_{\mathrm{B}\to\mathrm{C}} = \Delta\vec{x}_{\mathrm{A}\to\mathrm{C}}$$

ทั้งนี้เพราะว่า $\left(\vec{x}_{\mathrm{B}} - \vec{x}_{\mathrm{A}}\right) + \left(\vec{x}_{\mathrm{C}} - \vec{x}_{\mathrm{B}}\right) = \left(\vec{x}_{\mathrm{C}} - \vec{x}_{\mathrm{A}}\right)$

การเปลี่ยนแปลง ≡ ของใหม่ – ของเก่า

ถ้า Q เป็นปริมาณใด ๆ เราตกลงให้ $\boxed{\Delta Q \equiv Q_{\text{ใหม่}} - Q_{\text{เก่า}}}$

- $\Delta\vec{x}$ เป็นสัญลักษณ์หนึ่งตัว <u>ไม่ใช่</u> Δ คูณกับ $\vec{x}$
- ออกเสียง Δ ว่าเดลต้า และ อ่าน $\Delta\vec{x}$ ว่าเดลต้าเอกซ์
- $\vec{x}$ เป็นพยัญชนะในภาษากรีกเทียบเท่ากับพยัญชนะ D ในภาษาอังกฤษ
- เดลต้าตัวเล็กเขียนว่า δ เทียบเท่า d ในภาษาอังกฤษ

เราคือนาย

การที่เราจะเลือกทิศใดเป็นทิศอ้างอิงนั้น เราเป็นคนกำหนดขึ้นมาเอง องค์ประกอบของเวกเตอร์จะมีค่าเป็นบวกหรือลบขึ้นอยู่กับทิศอ้างอิงที่เราเลือก คนสองคนอาจเลือกใช้ทิศอ้างอิงที่ต่างกัน ทำให้ได้องค์ประกอบที่มีเครื่องหมายต่างกัน แต่ในที่สุดเมื่อแปลกลับเป็นทิศตามข้อตกลงของแต่ละคนแล้ว จะให้คำตอบสุดท้ายเดียวกัน

1.6 ระยะทางและการกระจัด

ในการวัดระยะทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ เราต้องรู้เส้นทางอย่างละเอียดว่าอนุภาคเคลื่อนที่ไปมาอย่างไร ในขณะที่เรารู้เพียงตำแหน่งตั้งต้นและตำแหน่งสุดท้าย เราก็หาการกระจัดได้ ในการหาระยะทางเมื่ออนุภาคเคลื่อนที่กลับทิศไปมา เราต้องแบ่งการเคลื่อนที่เป็นตอน ๆ โดยที่แต่ละตอนเป็นการเคลื่อนที่ไปในทิศเดียว แล้วเอา*ขนาด* ของการกระจัดแต่ละตอนมาบวกกันเป็นระยะทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปได้ทั้งหมด

ข้อสังเกตเพิ่มเติมเกี่ยวกับระยะทางและการกระจัดก็คือ

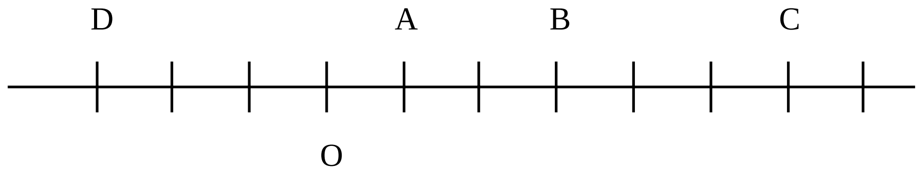
1. โดยทั่วไปแล้ว ระยะทางการเคลื่อนที่และขนาดของการกระจัดมีค่าไม่เท่ากัน
2. ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ไปในทิศเดียวตลอดการเดินทาง ขนาดของการกระจัดและระยะทางมีค่าเท่ากัน

3. เนื่องจากการกระจัดมีค่าเท่ากับตำแหน่งสุดท้ายลบด้วยตำแหน่งตั้งต้น ไม่ว่าอนุภาคจะมีการเคลื่อน ที่ไปมาอย่างไร แต่ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่กลับมาที่เดิมแล้ว การกระจัดจะมีค่าเป็นศูนย์แม้ว่าระยะทางที่วัดตามเส้นทางจะไม่เป็นศูนย์

ในระบบ SI ระยะทางและการกระจัดมีหน่วยเป็นเมตร (m)

ตัวอย่างที่ 1.6.1

พิจารณารูปที่ 1.6.1 ข้างล่าง



รูปที่ 1.6.1

อนุภาคหนึ่งมีการกระจัดจาก A ไป C ตามเส้นทาง $\mathrm{A} \rightarrow \mathrm{B} \rightarrow \mathrm{D} \rightarrow \mathrm{C}$ อนุภาคนี้มีการกระจัดเท่าไร และเคลื่อนที่ไปทั้งหมดได้ระยะทางเท่าไร กำหนดว่าช่องแบ่งระยะทางในรูปมีหน่วยเป็นเมตร (m)

วิธีคิด

ก่อนอื่นเราต้องเลือกจุดอ้างอิงและทิศอ้างอิง ให้ O เป็นจุดอ้างอิงและให้ทิศอ้างอิงเป็นทิศไปทางขวามือ ดังนั้นองค์ประกอบของการกระจัดที่มีทิศไปทางขวามือจะมีค่าเป็นบวก และที่มีทิศไปทางซ้ายมือจะมีค่าเป็นลบ เราจะได้ว่า $x_\mathrm{A} = +1\ \mathrm{m}$, $x_\mathrm{B} = +3\ \mathrm{m}$, $x_\mathrm{C} = +6\ \mathrm{m}$ และ $x_\mathrm{D} = -3\ \mathrm{m}$ เราหาการกระจัดที่ต้องการจากนิยาม

$$\Delta\vec{x}_{\mathrm{A}\rightarrow\mathrm{C}} = \vec{x}_\mathrm{C} - \vec{x}_\mathrm{A}$$

การกระจัดขึ้นอยู่กับจุดตั้งต้นและจุดสุดท้ายเท่านั้น องค์ประกอบของการกระจัดจาก A ไป C มีค่าเท่ากับ $x_\mathrm{C} - x_\mathrm{A} = +6\ \mathrm{m} - (+1\ \mathrm{m}) = +5\ \mathrm{m}$ จากข้อตกลงที่ให้ทิศอ้างอิงเป็นทิศไปทางขวามือ การกระจัดนี้คือการกระจัดไปทางขวาเป็นระยะทาง 5 m

ระยะทางทั้งหมดที่เคลื่อนที่ได้มีค่าเท่ากับระยะทางจาก A ไป B บวกด้วยระยะทางจาก B ไป D บวกด้วยระยะทางจาก D ไป C มีค่า $|+3-(+1)| + |(-3)-(+3)| + |+6-(-3)|\ \mathrm{m} = 2+6+9\ \mathrm{m} = 17\ \mathrm{m}$

1.7 การใช้กราฟบรรยายการเคลื่อนที่เชิงเส้น

กราฟมีประโยชน์อย่างมากในการแสดงข้อมูลและความสัมพันธ์ระหว่างปริมาณต่าง ๆ ในฟิสิกส์ เพราะช่วยในการ"เห็นภาพ" เราสามารถใช้ความชันของกราฟเพื่อบอกอัตราการเปลี่ยนแปลงปริมาณที่เราสนใจ และใช้พื้นที่ใต้กราฟเพื่อหาปริมาณสุทธิที่เปลี่ยนแปลงไปเมื่ออัตราการเปลี่ยนแปลงไม่คงที่ หลักการต่าง ๆ ที่เรียนจากการเคลื่อนที่เชิงเส้นสามารถนำไปใช้ในกรณีอื่น ๆ เช่น การคำนวณเรื่องงานและพลังงาน

การใช้กราฟบอกตำแหน่งที่เวลาต่าง ๆ

หลังจากที่เราได้เลือกตำแหน่งอ้างอิง ทิศอ้างอิง และเวลาที่เริ่มจับเวลาแล้ว เราจะได้ตัวเลขที่แทนค่าตำแหน่งของอนุภาคที่เวลาต่าง ๆ เราสามารถใช้ตัวเลขนี้บรรยายการเคลื่อนที่โดยบอกตำแหน่งของอนุภาคได้หลายวิธี คือ (สมมุติว่า x แทนตำแหน่งในหน่วยเมตร และ t แทนเวลาในหน่วยวินาที)

1. แจกแจงในลักษณะตารางข้างล่าง

t (s)	x (m)
0.0	0.0
1.0	3.0
2.0	12.0
3.0	27.0
4.0	48.0

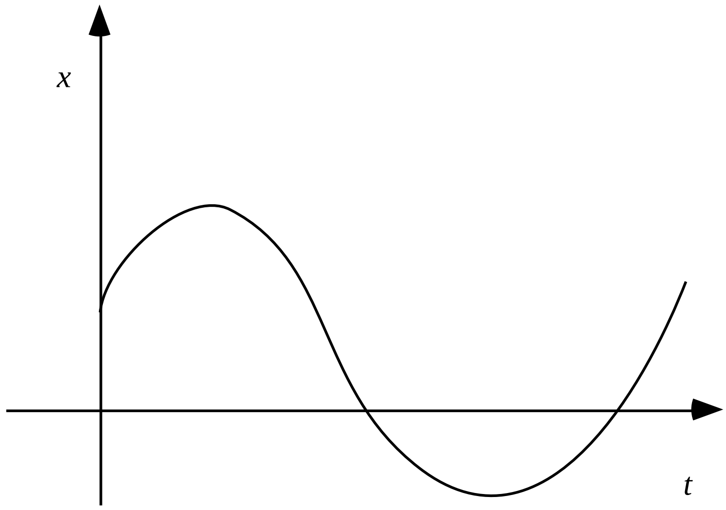
รูปที่ 1.7.1

2. บอกในลักษณะของสูตร (ถ้าทำได้! การเคลื่อนที่บางอย่างบรรยายด้วยสูตรไม่ได้) เช่น $x = 3t^2$
3. บอกในลักษณะของกราฟระหว่างตำแหน่งกับเวลา

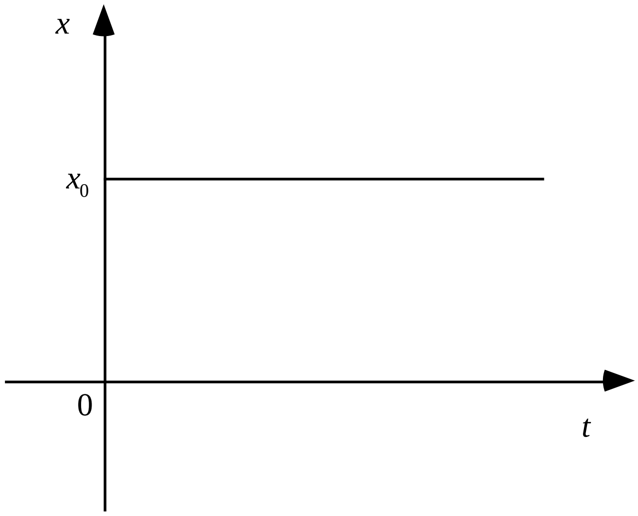
การบอกด้วยกราฟมีข้อดีเหนือกว่าวิธีอื่นตรงที่ทำให้เรา"เห็นภาพ" เราสามารถเห็นได้ทันทีว่าอนุภาคกำลังอยู่นิ่งหรือกำลังเคลื่อนที่ไปทางไหน ด้วยความเร็วที่คงที่หรือไม่ และมีแนวโน้มจะเคลื่อนที่ไปอย่างไร

โดยทั่วไปเราเขียนกราฟระหว่างตำแหน่งเทียบกับเวลาโดยใช้กราฟระบบแกนฉากที่มีแกนนอนเป็นแกนของตัวแปรอิสระ (มักเป็นเวลา) และแกนตั้งเป็นแกนของตัวแปรตาม (ในกรณีนี้คือค่าของตำแหน่ง) (ดูรูปที่ 1.7.2) ตัวเลขที่ใช้บอกตำแหน่งมีค่าเป็นได้ทั้งบวกและลบ (เครื่องหมายบวกลบใช้แทนทิศ) นอกจากกราฟระหว่างตำแหน่งกับเวลาแล้ว เรายังสามารถเขียนกราฟระหว่างความเร็วกับเวลา และกราฟระหว่างความเร่งกับเวลาได้ด้วย คุณสมบัติของกราฟที่เป็นประโยชน์คือความชันและพื้นที่ใต้กราฟ แต่ปริมาณทั้งสองจะมีความหมายเป็นอะไรนั้นขึ้นอยู่ว่ากราฟนั้นเป็นกราฟระหว่างปริมาณอะไรกับอะไร พื้นที่ใต้กราฟของกราฟบางกราฟก็ไม่มีความหมายทางฟิสิกส์ เช่น กราฟระหว่างตำแหน่งกับเวลา

รูปที่ 1.7.2 แสดงกราฟของตำแหน่งที่เวลาต่าง ๆ ในกรณีทั่ว ๆ ไป ส่วนรูปที่ 1.7.3 แสดงให้เห็นกราฟของอนุภาคซึ่งอยู่นิ่งที่ x_0 ตลอดเวลา กราฟจะเป็นกราฟเส้นตรงขนานกับแกนนอนเพราะตำแหน่งมีค่าคงที่ เราเห็นได้ว่าเส้นกราฟไม่มีความชันเลย



รูปที่ 1.7.2 กราฟของตำแหน่งกับเวลาในกรณีทั่วไป



รูปที่ 1.7.3 อนุภาคอยู่นิ่งที่ x_0 ตลอดเวลา

2. อัตราเร็วและความเร็ว

2.1 อัตราเร็วเฉลี่ย

สมมุติว่าเราต้องการสร้างปริมาณหนึ่งขึ้นมาเพื่อใช้บอกความรวดเร็วในการเคลื่อนที่ เราอาจเลือกว่าถ้าปริมาณนี้มีค่ามากแปลว่ารวดเร็วมาก เช่น ใช้ระยะทางที่เคลื่อนที่ได้ในช่วงเวลาเท่ากัน หรือเลือกปริมาณที่ถ้ามีขนาดน้อยแปลว่ารวดเร็วมากก็ได้ เช่น ใช้ช่วงเวลาที่ใช้ในการเคลื่อนที่ระยะทางหนึ่งที่เท่ากันอย่างในการวิ่งแข่ง 100 เมตร แต่การใช้ระยะทางหรือเวลาดังกล่าวมานี้มีข้อด้อยตรงที่เมื่อเราต้องการเปรียบเทียบความรวดเร็วของการเคลื่อนที่ของอนุภาคสองอนุภาค เราต้องเปรียบเทียบเมื่ออนุภาคทั้งสองเคลื่อนที่ในช่วงเวลาที่เท่ากันหรือในระยะทางที่เท่ากัน มันเป็นการสะดวกกว่าถ้าเราใช้ปริมาณที่ไม่มีข้อจำกัดว่าอนุภาคจะเคลื่อนที่ในระยะทางเท่าไรหรือใช้เวลาเท่าไร นั่นคือเราต้องใช้ทั้งระยะทางและเวลารวมกันเพื่อสร้างปริมาณที่ใช้วัดความรวดเร็วขึ้นมา ถ้าเราต้องการสร้างปริมาณที่เมื่อมีขนาดมากแปลว่ารวดเร็วมาก เราอาจให้นิยามปริมาณนั้นว่าคือระยะทางที่เคลื่อนที่ได้หารด้วยช่วงเวลาที่ใช้ ปริมาณนี้เรียกว่าอัตราเร็วเฉลี่ย (เฉลี่ย-เพราะคิดรวมตลอดการเคลื่อนที่ซึ่งอาจไม่คงที่) แต่ถ้าเราต้องการตัวเลขที่เมื่อมีขนาดน้อยแปลว่ารวดเร็วมาก เราอาจให้นิยามปริมาณนี้จากช่วงเวลาที่ใช้หารด้วยระยะทางที่เคลื่อนที่ได้ และอาจเรียกปริมาณนี้ว่าความช้าเฉลี่ยก็ได้ แต่โดยทั่วไปแล้วเราใช้อัตราเร็วเฉลี่ยในการวัดความรวดเร็ว นั่นคือ

$$\text{อัตราเร็วเฉลี่ย} \equiv \frac{\text{ระยะทางที่เคลื่อนที่ได้}}{\text{ช่วงเวลาที่ใช้}}$$

เนื่องจากระยะทางมีค่าเป็นบวกเสมอ อัตราเร็วเฉลี่ยจึงมีค่าเป็นบวกเสมอเช่นกัน ในระบบ SI ที่ระยะทางมีหน่วยเป็น m และช่วงเวลามีหน่วยเป็น s อัตราเร็วเฉลี่ยมีหน่วยเป็น $\mathrm{m/s}$

2.2 ความเร็วเฉลี่ย

ตัวเลขที่ได้จากอัตราเร็วเฉลี่ยไม่สามารถบอกได้ว่าในที่สุดอนุภาคมีการเคลื่อนที่ไปทางไหนของจุดตั้งต้น เพราะตัวเลขที่ได้มีค่าเป็นบวกเสมอ เครื่องหมายไม่สามารถใช้บอกทิศได้ แต่เราสามารถสร้างปริมาณที่ใช้บอกทั้งความรวดเร็วและทิศได้โดยใช้การกระจัดแทนระยะทาง เราให้นิยามปริมาณใหม่ว่าคือการกระจัดหารด้วยช่วงเวลาที่ใช้ และเรียกปริมาณนี้ว่าความเร็วเฉลี่ย

$$\text{ความเร็วเฉลี่ย} \equiv \frac{\text{การกระจัดที่เคลื่อนที่ได้}}{\text{ช่วงเวลาที่ใช้}}$$

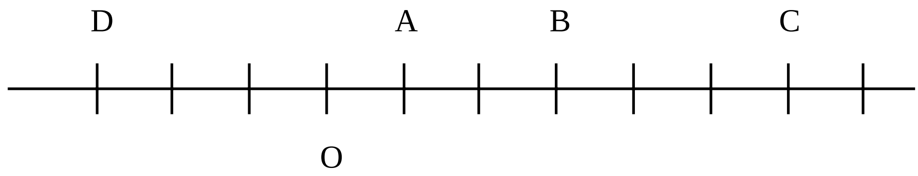
หรือในรูปของสัญลักษณ์

$$\vec{v}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \frac{\vec{x}_{\mathrm{B}} - \vec{x}_{\mathrm{A}}}{t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}}}$$

โดยที่เราได้ใช้สัญลักษณ์ $\vec{v}_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$ แทนความเร็วเฉลี่ยจาก A ไป B ความเร็วเฉลี่ยมีทิศเดียวกับการกระจัด และในระบบ SI มีหน่วยเป็น $\mathrm{m/s}$

ตัวอย่างที่ 2.2.1

พิจารณาการเคลื่อนที่ในตัวอย่าง 1.6.1 ที่ผ่านมา



รูปที่ 2.2.1

อนุภาค ๆ หนึ่งมีการกระจัดจาก A ไป C ตามเส้นทางจาก A ไป B ไป D แล้วไป C โดยใช้เวลาทั้งหมด 5 วินาที อนุภาคนี้มีอัตราเร็วเฉลี่ยและความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลานี้เท่าไร กำหนดว่าช่องแบ่งระยะทางในรูปมีหน่วยเป็นเมตร (m)

วิธีคิด

เราหาอัตราเร็วเฉลี่ยและความเร็วเฉลี่ยจากนิยาม ดังนั้นเรารู้ค่าระยะทางและการกระจัดก่อน ซึ่งเราก็ได้เคยหามาแล้วจากตัวอย่าง 1.6.1 โดยที่เราให้ O เป็นจุดอ้างอิงและให้ทิศอ้างอิง $\hat{\mathrm{x}}$ แทนทิศไปทางขวามือ การกระจัดมีค่าเท่ากับ $+5\ \mathrm{m}\ \hat{\mathrm{x}}$ ส่วนระยะทางทั้งหมดมีค่าเท่ากับ 17 m เอาช่วงเวลาที่ใช้ คือ 5 s หารปริมาณทั้งสอง เราจะได้ว่าความเร็วเฉลี่ยมีค่าเท่ากับ $+1\ \mathrm{m/s}\ \hat{\mathrm{x}}$ นั่นคือมีขนาดเท่ากับ 1 m/s และมีทิศไปทางขวามือ ส่วนอัตราเร็วเฉลี่ยของอนุภาคนี้มีค่าเท่ากับ 3.4 m/s

ถ้าเรากำหนดทิศอ้างอิงไว้แล้ว เราใช้แค่องค์ประกอบของการกระจัดในทิศอ้างอิงบอกตำแหน่งก็ได้ โดยที่เราใช้เครื่องหมายบวกลบบอกทิศแทน ให้ x แทนตำแหน่งที่วัดจากจุดอ้างอิง ให้ t แทนเวลาใด ๆ ที่อ่านจากนาฬิกา และเขียนป้ายชื่อห้อยที่ x และ t เพื่อบอกว่าเป็นตำแหน่งและเวลาใด ความเร็วเฉลี่ยของการเคลื่อนที่จากตำแหน่ง A ไป B คือ

$$\text{ความเร็วเฉลี่ยจาก A ไป B} = \frac{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}}{t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}}}$$

โดยที่ x_{A} และ x_{B} คือ"ตำแหน่ง"ของอนุภาคที่เวลา t_{A} และ t_{B} ตามลำดับ บางครั้งเราใช้สัญลักษณ์ย่อ $\langle v \rangle_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$ แทนความเร็วเฉลี่ย และใช้สัญลักษณ์ Δ เพื่อบอกค่าที่เปลี่ยนไป เราเขียนสมการข้างบนใหม่ได้ว่า

$$\langle v \rangle_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t}\right)_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}}$$

หรือถ้าเรารู้ว่าเราทำอะไรอยู่ เราอาจเขียนสมการข้างบนอย่างย่อ ๆ ว่า

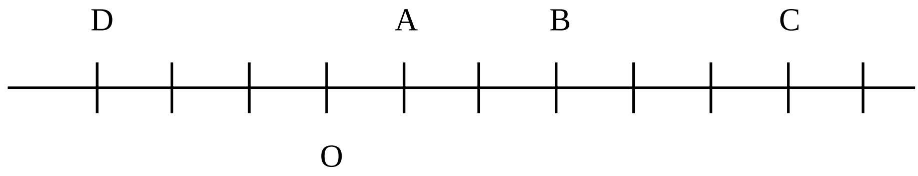
$$\langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

ในระบบ SI ที่ระยะทางมีหน่วยเป็นเมตร (m) และเวลามีหน่วยเป็นวินาที (s) ความเร็วเฉลี่ยมีหน่วยเป็นเมตรต่อวินาที m/s

2.2.1 การเคลื่อนที่อย่างสม่ำเสมอ

ในขณะที่อนุภาคมีการเคลื่อนที่ไป ถ้าในช่วงเวลาที่เท่ากันใด ๆ อนุภาคมีการกระจัดเท่ากัน เราเรียกการเคลื่อนที่แบบนั้นว่าเป็นการเคลื่อนที่อย่างสม่ำเสมอ จากนิยามของความเร็วเฉลี่ย เราสรุปได้ว่าอนุภาคมีการเคลื่อนที่อย่างสม่ำเสมอในช่วงเวลาหนึ่งเมื่ออนุภาคนั้นมีความเร็วเฉลี่ยเท่ากันตลอดทุกช่วงเวลาย่อยของช่วงเวลาทั้งหมดนั้น เราเรียกการเคลื่อนที่แบบนี้ว่าเป็นการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ด้วย

ตัวอย่าง 2.2.2



รูปที่ 2.2.1

ในรูปที่ 2.2.1 สมมุติว่าอนุภาคเคลื่อนที่จาก D ไป C โดยผ่าน O, A, และ B การเคลื่อนที่จาก D ไป C นี้เป็นการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ ถ้าความเร็วเฉลี่ยในช่วงย่อยใด ๆ เช่น จาก D ไป A หรือจาก O ไป B มีค่าเท่ากันหมดไม่ว่า O, A และ B จะเป็นจุดใด ๆ ระหว่าง D และ C

แบบฝึกหัด

นักวิ่งแข่งระดับนานาชาติจะวิ่งระยะทาง 100 เมตร ได้ในเวลาประมาณ 10 วินาที เขาวิ่งด้วยอัตราเร็วเฉลี่ยเท่าไรในหน่วยกิโลเมตรต่อชั่วโมง

2.3 อัตราเร็วและความเร็วขณะหนึ่ง

ในการวิ่งแข่ง 100 เมตร เราจะเห็นว่าในตอนเริ่มวิ่ง อัตราเร็วของนักวิ่งมีค่าน้อย แต่ว่าเมื่อวิ่งต่อไปเขาวิ่งด้วยอัตราเร็วที่มากขึ้น เราอาจอยากรู้ว่าขณะที่เขาวิ่งผ่านหน้าเรา เขาวิ่งด้วยอัตราเร็วเท่าไร ถ้าเราสังเกตว่าเรารู้ได้อย่างไรว่าอัตราเร็วตอนที่เขาผ่านหน้าเราเร็วกว่าตอนที่เขาผ่านหน้าเพื่อนเรา เราจะพบว่าเราดูว่าในช่วงเวลาสั้น ๆ ที่เขาผ่านหน้าเรา เขาเคลื่อนที่ไปได้ไกลกว่าตอนที่เขาผ่านหน้าเพื่อนเรา นั่นคืออัตราเร็วเฉลี่ยตอนที่ผ่านหน้าเรามีขนาดมากกว่าอัตราเร็วเฉลี่ยตอนที่ผ่านหน้าเพื่อนเรา ถ้าเราต้องการอัตราเร็วขณะที่เขาผ่านหน้าเราพอดี เราทำได้โดยการหาอัตราเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลาที่สั้นมากจนมีค่าเข้าใกล้ศูนย์ ในทำนองเดียวกันความเร็วขณะหนึ่งก็หาได้จากความเร็วเฉลี่ยเมื่อช่วงเวลาเข้าหาศูนย์

$$\text{อัตราเร็วที่เวลา } t_1 = \frac{\text{ระยะทางที่เคลื่อนที่ได้ในช่วงเวลา } t_1 \text{ ถึง } t_2}{t_2 - t_1} \qquad \text{เมื่อ } t_2 - t_1 \text{ มีค่าเข้าหาศูนย์}$$

เพื่อความสะดวกในภายหลัง เราจะเขียนสมการบนใหม่โดยให้ $t_1 = T$ และให้ t_2 เป็นเวลาหลัง t_1 อยู่ Δt นั่นคือ $t_2 - t_1 = \Delta t$ และให้ ℓ แทนความยาวที่วัดจากตำแหน่งอ้างอิง เราได้ว่า

$$\text{อัตราเร็วที่เวลา } T = \frac{\ell(\text{ที่เวลา } T+\Delta t) - \ell(\text{ที่เวลา } T)}{\Delta t} \quad \text{เมื่อ } \Delta t \to 0$$

ในทำนองเดียวกัน ความเร็วที่เวลา T ใด ๆ หาได้จาก

$$\text{ความเร็วที่เวลา } T = \frac{\vec{x}(\text{ที่เวลา } T+\Delta t) - \vec{x}(\text{ที่เวลา } T)}{\Delta t} \quad \text{เมื่อ } \Delta t \to 0$$

โดยที่ $\vec{x}$ คือตำแหน่งของอนุภาคจากจุดอ้างอิง

เรามักใช้สัญลักษณ์ $\vec{v}$ แทนความเร็วขณะหนึ่ง ดังนั้น

$$\vec{v}(\text{ที่เวลา } T) = \frac{\vec{x}(\text{ที่เวลา } T+\Delta t) - \vec{x}(\text{ที่เวลา } T)}{\Delta t} \quad \text{เมื่อ } \Delta t \to 0$$

หมายเหตุ:

1. เราอาจให้นิยามการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วสม่ำเสมอในช่วงเวลาหนึ่ง ว่าเป็นการเคลื่อนที่ซึ่งความเร็วขณะใด ๆ มีค่าเท่ากันหมดในช่วงเวลานั้น

2. ขนาดของความเร็วขณะหนึ่งมีค่าเท่ากับขนาดของอัตราเร็วขณะหนึ่ง เพราะว่าในช่วงเวลาที่สั้นมาก ๆ การเคลื่อนที่ไม่มีการเปลี่ยนทิศทาง

ตัวอย่าง 2.3.1

สมมุติว่าตำแหน่งของอนุภาคหนึ่งจากจุดอ้างอิงที่เวลาใด ๆ จากที่เริ่มจับเวลาหาได้จากสูตร

ตำแหน่งในหน่วยเมตร = 3 คูณ เวลาในหน่วยวินาทียกกำลังสอง

(ตำแหน่งนี้บอกเทียบกับทิศอ้างอิงที่ได้เลือกไว้)   จงหาอัตราเร็วเฉลี่ยของอนุภาคในระหว่างช่วงเวลาต่อไปนี้

1. 1.000 ถึง 2.000 วินาที
2. 1.000 ถึง 1.500 วินาที
3. 1.000 ถึง 1.100 วินาที
4. 1.000 ถึง 1.010 วินาที
5. 1.000 ถึง 1.001 วินาที

ที่เวลา 1.000 วินาที อนุภาคมีอัตราเร็วเท่าไร

วิธีทำ

เราหาอัตราเร็วเฉลี่ยจากนิยาม

$$\text{อัตราเร็วเฉลี่ย} = \frac{\text{ระยะทางที่เคลื่อนที่ได้}}{\text{ช่วงเวลาที่ใช้}}$$

จากที่กำหนดมาให้ เราเห็นได้ว่าตำแหน่งมีค่าเพิ่มขึ้นเรื่อย ๆ ดังนั้นการเคลื่อนที่ไปทางเดียวเสมอ ระยะทางที่เคลื่อนที่ไปได้กับขนาดของการกระจัดจึงมีค่าเท่ากัน เพราะฉะนั้นเราหาอัตราเร็วเฉลี่ยได้จากความเร็วเฉลี่ยซึ่งคือตำแหน่งที่เปลี่ยนไปหารด้วยช่วงเวลาที่ใช้ ถ้าให้ t แทนเวลา และ $x(\text{ที่เวลา } t)$ แทนตำแหน่ง จากที่กำหนดมาเราเขียนเป็นสูตรได้ว่า

$$x(\text{ที่เวลา } t) = 3t^2$$

จากสูตรข้างบนเราคำนวณตำแหน่งของอนุภาคที่เวลาต่าง ๆ ได้ดังตารางข้างล่าง

t (s)	x (m)
1.000	3.000
1.001	3.006003
1.010	3.0603
1.100	3.630
1.500	6.750
2.000	12.000

รูปที่ 2.3.1

ดังนั้น

ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1.000 ถึง 2.000 วินาที $= \dfrac{12.000 - 3.000}{2.000 - 1.000}$ เมตร/วินาที = 9.000 m/s

ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1.000 ถึง 1.500 วินาที $= \dfrac{6.750 - 3.000}{1.500 - 1.000}$ เมตร/วินาที = 7.500 m/s

ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1.000 ถึง 1.100 วินาที $= \dfrac{3.630 - 3.000}{1.100 - 1.000}$ เมตร/วินาที = 6.300 m/s

ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1.000 ถึง 1.010 วินาที $= \dfrac{3.0603 - 3.000}{1.010 - 1.000}$ เมตร/วินาที = 6.030 m/s

ความเร็วเฉลี่ยในช่วง 1.000 ถึง 1.001 วินาที $= \dfrac{3.006003 - 3.000}{1.001 - 1.000}$ เมตร/วินาที = 6.003 m/s

จะเห็นได้ว่าเมื่อช่วงเวลามีขนาดสั้นลง ๆ ความเร็วเฉลี่ยมีค่าเข้าใกล้ 6.0 m/s มากขึ้น ๆ ดังนั้นถ้าเราต้องการความถูกต้องเพียงแค่ทศนิยมหนึ่งตำแหน่ง เราอาจตอบว่าความเร็วที่เวลา 1.0 s มีขนาดเท่ากับ 6.0 m/s ขนาดของความเร็วนี้คือค่าของอัตราเร็วที่ต้องการด้วย

ถ้าเราต้องการความถูกต้องถึงทศนิยมมากตำแหน่งกว่านี้ เราต้องพิจารณาช่วงเวลาที่เล็กกว่านี้ลงไปเรื่อย ๆ ซึ่งเป็นงานที่ค่อนข้างน่าเบื่อ ยกเว้นว่าเราเขียนโปรแกรมให้คอมพิวเตอร์คำนวณไปเรื่อย ๆ จนได้ความละเอียดที่ต้องการ วิธีที่ดีกว่าคือคิดติดเป็นสัญลักษณ์ไว้ แล้วค่อยแทนค่าในตอนหลัง ซึ่งจะทำให้เราไม่ต้องเริ่มต้นคำนวณใหม่ทุกครั้งที่พิจารณาช่วงเวลาให้สั้นลง เราทำดังนี้

เราหาความเร็วจากนิยาม $v(\text{ที่เวลา } T) = \dfrac{x(\text{ที่เวลา } T + \Delta t) - x(\text{ที่เวลา } T)}{\Delta t}$ เมื่อ $\Delta t \to 0$

ตำแหน่ง $x(\text{ที่เวลา } T + \Delta t)$ และ $x(\text{ที่เวลา } T)$ หาได้จากสูตร $x(\text{ที่เวลา } t) = 3t^2$ นั่นคือ

$$x(\text{ที่เวลา } T) = 3 \times T^2$$

และ

$$x(\text{ที่เวลา } T + \Delta t) = 3 \times (T + \Delta t)^2 = 3T^2 + 6T\Delta t + 3(\Delta t)^2$$

แทนค่าที่ได้ลงในนิยามของความเร็ว จะได้ว่า

$$v(\text{ที่เวลา } T) = \frac{3T^2 + 6T\Delta t + 3(\Delta t)^2 - 3T^2}{\Delta t} \text{ เมื่อ } \Delta t \to 0 = 6T + 3\Delta t \text{ เมื่อ } \Delta t \to 0 = 6T$$

นั่นคือ ความเร็วที่เวลา T ใด ๆ มีค่าเท่ากับ $6T$ ถ้าเราต้องการรู้ว่าความเร็วที่เวลา T มีค่าเป็นเท่าไร เราก็แทนค่า T ลงไป และได้คำตอบในทันทีโดยที่ไม่ต้องเริ่มต้นคิดเลขใหม่ทุกครั้ง เช่น เมื่อ $T = 1$ วินาที เราได้คำตอบทันทีว่าความเร็วมีค่าเท่ากับ 6.0 m/s ค่านี้เป็นค่าอัตราเร็วด้วย

คำถาม ในตัวอย่าง 2.3.1 ความเร็วของอนุภาคที่เวลา 2.0 วินาทีมีค่าเท่าไร

แบบฝึกหัด

สมมุติว่าตำแหน่งของอนุภาคหนึ่งจากจุดอ้างอิงที่เวลาใด ๆ หลังจากที่เริ่มจับเวลามีค่าตามสูตร

ตำแหน่งในหน่วยเมตร = 3 คูณ เวลาในหน่วยวินาทียกกำลังสอง + 2 คูณ เวลาในหน่วยวินาที

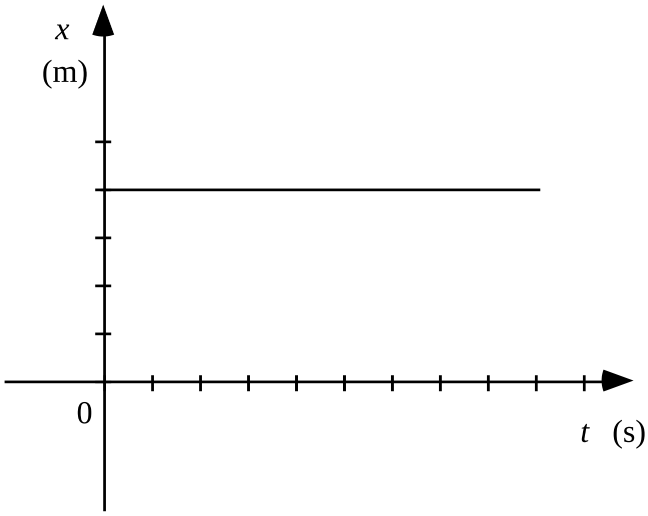
หรือ $x(\text{ที่เวลา } t) = 3t^2 + 2t$ โดยที่สัญลักษณ์ต่าง ๆ มีความหมายเหมือนในตัวอย่าง 2.3.1

จงหาว่าที่เวลา T ใด ๆ อนุภาคมีความเร็วเท่าไร

(ตอบ $v(T) = 6T + 2$)

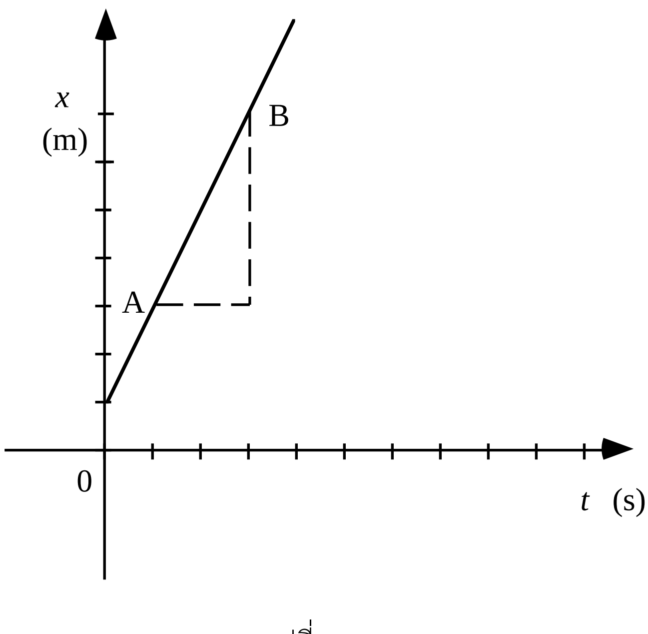
2.4 การหาความเร็วจากกราฟระหว่างตำแหน่งกับเวลา

เราสามารถหาความเร็วเฉลี่ยและความเร็วขณะหนึ่งจากกราฟระหว่างตำแหน่งกับเวลาได้ โดยทั่วไปเราเขียนกราฟโดยให้แกนนอนเป็นแกนของเวลาและแกนตั้งเป็นแกนของตำแหน่ง เราเริ่มจากกรณีง่าย ๆ ก่อน รูปที่ 2.4.1 เป็นกราฟของอนุภาคซึ่งอยู่นิ่งตลอดเวลาที่ $x = +4\ \mathrm{m}$ เพราะไม่ว่าเวลาจะเป็นเท่าใด อนุภาคอยู่ที่ตำแหน่ง $x = +4\ \mathrm{m}$ เสมอ กราฟที่ได้เป็นเส้นตรงในแนวนอน คือไม่มีความชันเลย



รูปที่ 2.4.1 อนุภาคอยู่นิ่งที่ $x = +4\ \mathrm{m}$

รูปที่ 2.4.2 ข้างล่างแสดงให้เห็นกราฟของอนุภาคที่เดิมอยู่ที่ตำแหน่ง $x = +1\ \mathrm{m}$ ที่เวลา $t = 0\ \mathrm{s}$ และมีการเปลี่ยนตำแหน่งเพิ่มขึ้นในทิศอ้างอิงอย่างสม่ำเสมอด้วยอัตรา $2\,\mathrm{m/s}$ กราฟที่ได้เป็นกราฟเส้นตรงเพราะอนุภาคมีการเปลี่ยนตำแหน่งอย่างคงตัว ในทางกลับกัน ถ้ามีคนให้กราฟนี้มา เราสามารถหาความเร็วจากกราฟได้โดยการดูว่าอนุภาคมีการเปลี่ยนตำแหน่งไปอย่างไร



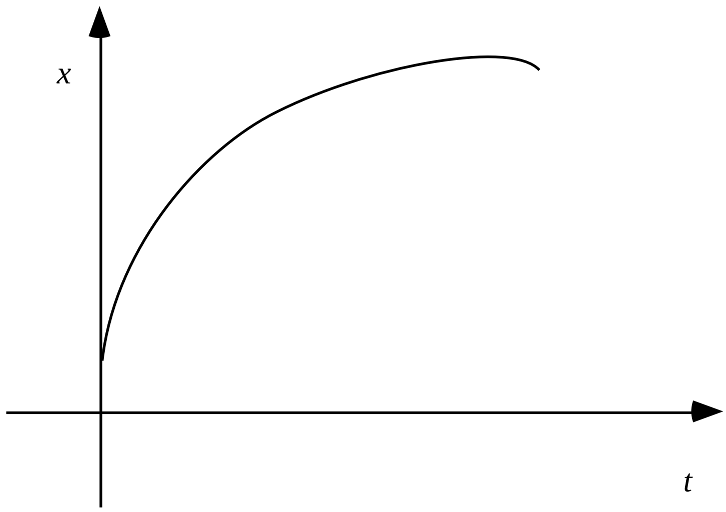
รูปที่ 2.4.2

การหาความเร็วจากความชันของกราฟระหว่างตำแหน่งกับเวลา

เราสามารถหาความเร็วเฉลี่ยและความเร็วขณะหนึ่งจากกราฟระหว่างตำแหน่งกับเวลาได้

ความเร็วเฉลี่ย

รูปที่ 2.4.3 เป็นกราฟระหว่างตำแหน่งและเวลาของการเคลื่อนที่ของอนุภาคหนึ่ง



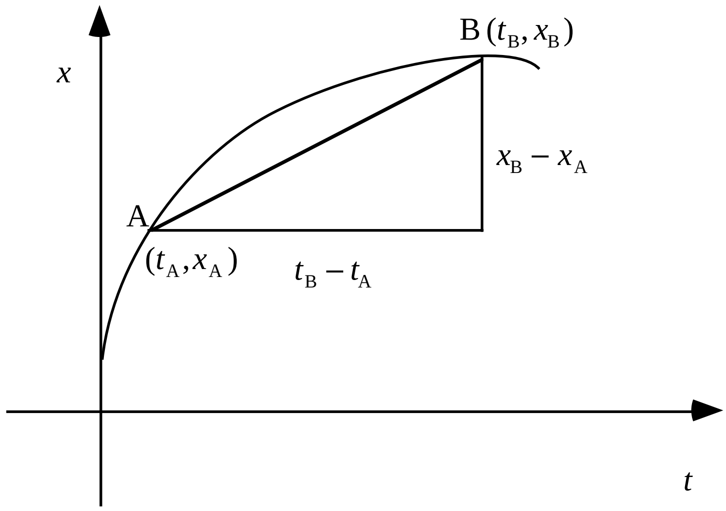
รูปที่ 2.4.3 กราฟระหว่างตำแหน่งและเวลาของอนุภาคหนึ่ง

สมมุติว่าเราต้องการหาความเร็วเฉลี่ยของอนุภาคระหว่างเวลา t_{A} และ t_{B} ใด ๆ

โดยนิยาม เรารู้ว่า
$$\langle v\rangle_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \frac{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}}{t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}}}$$
ในที่นี้ x_{A} และ x_{B} คือตำแหน่งอนุภาคที่เวลา t_{A} และ t_{B} ตามลำดับ

ให้เราพิจารณาความหมายของปริมาณนี้ในแง่มุมของกราฟ ในรูปที่ 2.4.4 ให้ A และ B เป็นจุดบนเส้นโค้งของกราฟซึ่งตรงกับเวลา t_{A} และ t_{B} ตามลำดับ จุด A และ B มีพิกัดเป็น $(t_{\mathrm{A}}, x_{\mathrm{A}})$ และ $(t_{\mathrm{B}}, x_{\mathrm{B}})$ ตามลำดับ เราลากเส้นตรงเชื่อมระหว่างจุด A และ B และสร้างสามเหลี่ยมมุมฉากโดยให้เส้นตรงนี้เป็นด้านตรงข้ามมุมฉากดังรูปที่ 4 ปริมาณ $x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}$ คือความสูงในแนวตั้งของสามเหลี่ยมนี้ ส่วน $t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}}$ เป็นความยาวตามแนวนอน โดยนิยาม อัตราส่วนของความยาวตามแนวตั้งต่อความยาวตามแนวนอน $\dfrac{x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}}{t_{\mathrm{B}} - t_{\mathrm{A}}}$ คือความชันของเส้นตรง AB นี้ แต่ว่าอัตราส่วนนี้มีค่าตรงกับความเร็วเฉลี่ยระหว่างเวลา t_{A} และ t_{B} ดังนั้นเราสรุปได้ว่า

ความเร็วเฉลี่ยระหว่างเวลาสองเวลาใด ๆ สามารถหาได้จากกราฟระหว่างตำแหน่งกับเวลา โดยการคำนวณค่าของความชันของเส้นตรงที่ลากเชื่อมพิกัดของจุดทั้งสอง

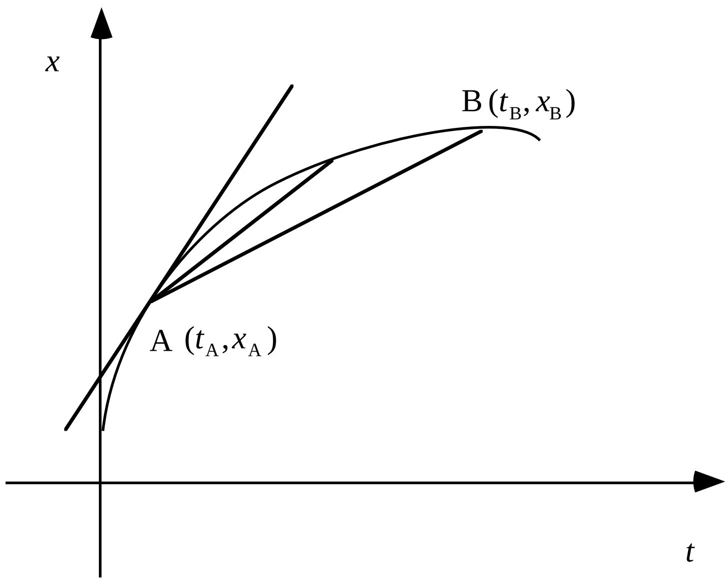


รูปที่ 2.4.4

ความเร็วขณะหนึ่ง

ในรูปที่ 2.4.4 ถ้าเราให้เวลา t_B มีค่าเข้าใกล้เวลา t_A มาก ๆ ในที่สุดเส้นตรง AB จะกลายเป็น *เส้นสัมผัส*กับเส้นโค้งของกราฟที่ตำแหน่ง A (รูปที่ 2.4.5) จากนิยามที่ว่าความเร็วขณะหนึ่งคือความเร็วเฉลี่ยในช่วงเวลาสั้น ๆ ที่มีค่าเข้าหาศูนย์ และจากข้อสรุปข้างบนที่ว่าความเร็วเฉลี่ยคือความชันของเส้นตรงที่เชื่อมจุดที่เวลาทั้งสอง เราสรุปได้ว่า

ความเร็วขณะหนึ่งที่เวลาใด ๆ สามารถหาได้จากกราฟระหว่างตำแหน่งกับเวลา โดยการคำนวณค่าความชันของเส้นตรงที่ลากสัมผัสกับเส้นโค้งของกราฟที่เวลานั้น



รูปที่ 2.4.5

2.5 การหาการกระจัดและระยะทางจากความเร็ว

เราเริ่มพิจารณาจากตัวอย่าง

ตัวอย่าง 2.3.2

ในการเคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงเส้นหนึ่ง อนุภาค P เคลื่อนที่ผ่านจุด O ด้วยความเร็วคงที่ $5.0\,\mathrm{m/s}$ ไปทางขวา 4.0 วินาทีต่อมา อนุภาค Q เคลื่อนที่ผ่านจุด O ด้วยความเร็วคงที่ $10\,\mathrm{m/s}$ ไปทางขวาเช่นกัน Q จะไล่ทัน P ที่ตำแหน่งใดจากจุด O และที่เวลาเท่าไรหลังจากที่ P ผ่าน O

วิธีคิด

1. เราต้องเข้าใจก่อนว่าคำถามต้องการอะไรและมีเงื่อนไขอย่างไร โจทย์ต้องการตำแหน่งและเวลาที่ Q ทัน P เงื่อนไขนี้หมายความว่า อนุภาคทั้งสองอยู่ที่เดียวกัน ที่เวลาเดียวกัน

2. ขั้นตอนที่สำคัญต่อไป คือการตั้งชื่อและสัญลักษณ์เพื่อแทนสิ่งที่เราไม่รู้ก่อน การมีชื่อเรียกทำให้เราเขียนเงื่อนไขในรูปสมการและแทนเป็นปริมาณพีชคณิตได้ ทำให้สะดวกในการคำนวณ สิ่งที่เราสนใจคือตำแหน่งและเวลาของ P และ Q ในการบอกตำแหน่งและเวลา เราต้องเลือกจุดอ้างอิงและทิศบวก และต้องบอกว่าเราเริ่มจับเวลาเมื่อใด เราจะเลือกให้ O เป็นจุดอ้างอิง ให้เครื่องหมายบวกแทนทิศไปทางขวามือ และให้ t เป็นเวลาซึ่งอ่านได้จากนาฬิกาที่เริ่มจับตอนที่ P ผ่าน O พอดี

เราให้ $x_\mathrm{P}, x_\mathrm{Q}$ เป็นตำแหน่งของ P และ Q ที่เวลา t ตามลำดับ

ให้ Q ทัน P ที่เวลา $t_{\text{ทัน}}$ ที่เวลานี้เรารู้ว่า $x_\mathrm{P}(\text{ที่เวลา } t_{\text{ทัน}}) = x_\mathrm{Q}(\text{ที่เวลา } t_{\text{ทัน}})$

3. ขั้นต่อไปคือการโยงสิ่งที่เราต้องการหากับสิ่งที่เรารู้ค่า

ตำแหน่งของ P ที่เวลา $t_{\text{ทัน}}$ หาได้จากตำแหน่งเดิมที่เวลา $t = 0.0\ \mathrm{s}$ ส่วนตำแหน่งของ Q หาได้จากตำแหน่งที่เวลา $t = 4.0\ \mathrm{s}$ เนื่องจากการเคลื่อนที่ของทั้ง P และ Q เป็นการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ ดังนั้น

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{หรือ} \qquad \Delta x = v\Delta t$$

แต่ $\quad \Delta x = x_{\text{ใหม่}} - x_{\text{เก่า}}$

ดังนั้น $\quad x_{\text{ใหม่}} = x_{\text{เก่า}} + \Delta x = x_{\text{เก่า}} + v\Delta t = x_{\text{เก่า}} + v(t_{\text{เก่า}} - t_{\text{เก่า}})$

สำหรับ P เราได้ว่า $\quad x_\mathrm{P}(\text{ที่เวลา } t_{\text{ทัน}}) = x_\mathrm{P}(\text{ที่เวลา } t = 0.0\ \mathrm{s}) + (5.0\ \mathrm{m/s}) \times (t_{\text{ทัน}} - 0.0\ \mathrm{s})$

ส่วน Q เราจะได้ว่า $\quad x_\mathrm{Q}(\text{ที่เวลา } t_{\text{ทัน}}) = x_\mathrm{Q}(\text{ที่เวลา } t = 4.0\ \mathrm{s}) + (10\ \mathrm{m/s}) \times (t_{\text{ทัน}} - 4.0\ \mathrm{s})$

เนื่องจากที่เวลา $t_{\text{ทัน}}$ P และ Q อยู่ที่เดียวกัน ดังนั้น

$$x_{\mathrm{P}}(\text{ที่เวลา } t=0.0\ \mathrm{s})+(5.0\ \mathrm{m/s})\times(t_{\text{ทัน}}-0.0\ \mathrm{s})=x_{\mathrm{Q}}(\text{ที่เวลา } t=4.0\ \mathrm{s})+(10\ \mathrm{m/s})\times(t_{\text{ทัน}}-4.0\ \mathrm{s})$$

แต่ตำแหน่งของ P ที่เวลา $t=0.0$ s อยู่ที่ O ที่เดียวกับตำแหน่งของ Q ที่เวลา $t=4.0$ s ด้วย ดังนั้น

$$(5.0\ \mathrm{m/s})\times t_{\text{ทัน}}=(10\ \mathrm{m/s})\times t_{\text{ทัน}}-40\ \mathrm{m} \qquad \text{หรือ} \qquad (5.0\ \mathrm{m/s})\times t_{\text{ทัน}}=40\ \mathrm{m}$$

นั่นคือ
$$t_{\text{ทัน}}=\frac{40\ \mathrm{m}}{5.0\ \mathrm{m/s}}=8.0\ \mathrm{s}$$

หลังจากที่ได้เวลาที่ทันกันแล้ว เราหาตำแหน่งที่ Q ทัน P ได้จาก

$$\begin{aligned} x_{\mathrm{P}}(\text{ที่เวลา } t_{\text{ทัน}}) &= x_{\mathrm{P}}(\text{ที่เวลา } t=0.0\ \mathrm{s})+(5.0\ \mathrm{m/s})\times(t_{\text{ทัน}}-0.0\ \mathrm{s}) \\ &= 0.0\ \mathrm{m}+(5.0\ \mathrm{m/s})\times 8.0\ \mathrm{s}=40\ \mathrm{m} \end{aligned}$$

ดังนั้น Q ทัน P ที่ตำแหน่งซึ่งอยู่ห่างจาก O ไปทางขวาเป็นระยะทาง 40 m หลังจากที่ P ผ่าน O ไปแล้ว 8 s

2.6 การหาการกระจัดเมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร็วไม่คงตัว

จากนิยามของความเร็วเฉลี่ยและจากตัวอย่างข้างบน เราเห็นว่าถ้าเรารู้ความเร็วเฉลี่ย หรือเมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัว เราสามารถคำนวณหาการกระจัดได้จาก

$$\Delta x = v\Delta t$$

เมื่อ v เป็นความเร็วเฉลี่ยหรือความเร็วที่คงตัว แต่ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร็วไม่คงตัว เราจะคำนวณการกระจัดทั้งหมดได้อย่างไร เนื่องจากเราไม่มี"เครื่องมือ"สำหรับคำนวณการเคลื่อนที่ในลักษณะนี้โดยตรง เราต้องใช้เครื่องมือที่มีอยู่ซึ่งใช้สำหรับการเคลื่อนที่ด้วยความความเร็วคงตัว ดังนั้นเราต้องแบ่งการเคลื่อนที่ออกเป็นช่วง ๆ โดยที่แต่ละช่วงเป็นการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงจัว เราหาการกระจัดในแต่ละช่วง แล้วนำมารวมกันเป็นการกระจัดทั้งหมดที่ต้องการ เราจะสาธิตวิธีการจากตัวอย่างที่ความเร็วเปลี่ยนแบบเป็นขั้นกระโดดไม่ต่อเนื่อง (จริง ๆ ในธรรมชาติไม่มี) แล้วทำในกรณีที่ความเร็วเปลี่ยนไปอย่างต่อเนื่องภายหลัง

ตัวอย่าง

ในการเคลื่อนที่ของอนุภาค ๆ หนึ่งพบว่ามีการเคลื่อนที่ดังนี้ : ในช่วง 1.0 วินาทีแรกเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัว 2.0 m/s ไปทางขวา ในช่วง 2.0 วินาทีต่อมาเคลื่อนที่ด้วยความเร็วเฉลี่ย 3.0 m/s ไปทางขวา และในช่วง 1.5 วินาทีต่อมาเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัว 2.0 m/s ไปทางซ้าย การกระจัดทั้งหมดและความเร็วเฉลี่ยของอนุภาคในช่วงเวลา 4.5 วินาทีนี้มีค่าเท่าไร

วิธีคิด

เราหาการกระจัดทั้งหมดโดยการหาการกระจัดในแต่ละช่วงการเคลื่อนที่ซึ่งมีความเร็วคงที่หรือที่เรารู้ความเร็วเฉลี่ย แล้วนำการกระจัดมาบวกกัน ส่วนความเร็วเฉลี่ยหาได้จากการกระจัดทั้งหมดหารด้วยช่วงเวลาที่ใช้

$$\Delta x_{\text{ทั้งหมด}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 \quad \text{และ} \quad \langle v \rangle = \frac{\Delta x_{\text{ทั้งหมด}}}{\Delta t}$$

โดยที่ Δx_1, Δx_2, Δx_3 **และ** $\Delta x_{\text{ทั้งหมด}}$ คือการกระจัดในช่วงที่ 1, 2, 3 และการกระจัดทั้งหมดตามลำดับ

เราให้ทิศขวามือแทนด้วยเครื่องหมายบวกและดังนั้นเครื่องหมายลบแทนทิศไปทางซ้าย จาก $\Delta x = v\Delta t$ เราหาได้ว่า $\Delta x_1 = (2.0 \text{ m/s}) \times 1.0 \text{ s} = 2.0 \text{ m}$, $\Delta x_2 = (3.0 \text{ m/s}) \times 2.0 \text{ s} = 6.0 \text{ m}$, และ $\Delta x_3 = (-2.0 \text{ m/s}) \times 1.5 \text{ s} = -3.0 \text{ m}$

ดังนั้น $\Delta x_{\text{ทั้งหมด}} = 2.0 + 6.0 + (-3.0) \text{ m} = +5.0 \text{ m}$ การกระจัดทั้งหมดไปทางขวาเป็นระยะทาง 5.0 m

และความเร็วเฉลี่ยที่ต้องการคือ $\langle v \rangle = \dfrac{\Delta x_{\text{ทั้งหมด}}}{\Delta t} = \dfrac{+5.0 \text{ m}}{4.5 \text{ s}} = 1.1 \text{ m/s}$ ไปทางขวา

ต่อไปเราจะทำตัวอย่างการหากระจัดเมื่ออนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร็วที่เปลี่ยนไปอย่างต่อเนื่อง

ตัวอย่าง

พิจารณาการเคลื่อนที่ของอนุภาคหนึ่งซึ่งความเร็วที่เวลา t ใด ๆ หาได้จากสูตร

$$v(\text{ที่เวลา } t) = u + a(t - t_0)$$

โดยที่ a เป็นค่าคงที่ และ t_0 คือเวลาขณะหนึ่ง จงหาการกระจัดของอนุภาคนี้เมื่ออนุภาคเคลื่อนที่จากตำแหน่งที่อยู่ที่เวลา t_0 ไปอยู่ที่ตำแหน่งที่เวลา T ต่อมา

วิธีคิด

จาก $v(\text{ที่เวลา } t) = u + a(t - t_0)$ เราเห็นได้ว่าที่เวลา t_0 ความเร็วมีค่าเท่ากับ u ดังนั้น

$$v(\text{ที่เวลา } t) - v(\text{ที่เวลา } t_0) = u + a(t - t_0) - u = a(t - t_0)$$

นั่นคือ ความเร็วเพิ่มขึ้นจาก u ที่เวลา t_0 ด้วยอัตราคงที่ตามเวลาที่เพิ่มขึ้นจาก t_0

เมื่อความเร็วไม่คงที่ เราต้องแบ่งการเคลื่อนที่ออกเป็นช่วง ๆ ที่มีความเร็วคงที่ แต่เนื่องจากในกรณีนี้ความเร็วเปลี่ยนไปอย่างต่อเนื่อง ไม่ว่าเราจะแบ่งช่วงอย่างไร ก็จะไม่มีช่วงใดที่ความเร็วคงที่ได้ แต่ว่าถ้าช่วงเวลาสั้นมาก ๆ ความเร็วที่เปลี่ยนไปในแต่ละช่วงจะเปลี่ยนน้อยมากจนประมาณได้ว่ามีค่าคงที่ ดังนั้นถ้าเราเลือก

ความเร็วที่ขณะใดขณะหนึ่งของช่วงเป็นความเร็วตัวแทนของช่วงนี้ เราสามารถคำนวณการกระจัดของช่วงนี้ได้ เราทำเช่นนี้กับการเคลื่อนที่ในช่วงอื่น ๆ แล้วเอาการกระจัดที่ได้ทั้งหมดมาบวกกัน

สมมุติว่าเราแบ่งช่วงเวลาทั้งหมดออกเป็นช่วงที่ 1, ช่วงที่ 2, ช่วงที่ 3,..., ช่วงที่ n (ทั้งหมด n ช่วง) โดยที่มีช่วงเวลานานเท่ากับ $\delta t_1,\ \delta t_2,\ \delta t_3,\ ...,\ \delta t_n,$ ตามลำดับ และให้ $v_1,\ v_2,\ v_3,\ ...,\ v_n$ เป็นความเร็วตัวแทนของช่วงที่ 1, ช่วงที่ 2, ช่วงที่ 3,..., ช่วงที่ n ตามลำดับ ดังนั้นการกระจัดเล็ก ๆ ในช่วงต่าง ๆ จึงมีค่าประมาณได้ว่า

$$\delta x_1 = v_1\delta t_1,\ \delta x_2 = v_2\delta t_2,\ \delta x_3 = v_3\delta t_3,\ ...,\ \delta x_n = v_n\delta t_n$$

และการกระจัดทั้งหมด Δx มีค่าประมาณ

$$\Delta x = v_1\delta t_1 + v_2\delta t_2 + v_3\delta t_3 + ... + v_n\delta t_n$$

เพื่อความง่ายในการคำนวณ เราเลือกแบ่งให้ทุกช่วงเวลานานเท่ากันและให้เท่ากับ $\delta t = \frac{1}{n}(T - t_0)$ นั่นคือ

$$\delta t_1 = \delta t_2 = \delta t_3 = ... = \delta t_n = \delta t = \frac{1}{n}(T - t_0)$$

เพราะฉะนั้น $$\Delta x \approx v_1\delta t + v_2\delta t + v_3\delta t + ... + v_n\delta t = (v_1 + v_2 + v_3 + ... + v_n)\delta t$$

ขั้นต่อไปเราเลือกความเร็วที่เป็นตัวแทนของช่วงต่าง ๆ ให้เป็นความเร็วที่ตรงกลางของช่วงต่าง ๆ (จะใช้ความเร็วที่เวลาอื่นของช่วง เช่น ที่ปลายช่วงก็ได้ แต่ในที่สุดเมื่อพิจารณาให้ช่วงเล็กมาก ๆ จนเข้าใกล้ศูนย์แล้วจะให้คำตอบเท่ากัน) เนื่องจากแต่ละช่วงนานเท่ากับ δt เวลาที่ปลายช่วงที่ 1, ช่วงที่ 2, ช่วงที่ 3,..., ช่วงที่ n จึงเป็นเวลาที่ $t_0 + \frac{1}{2}\delta t$, $t_0 + \frac{3}{2}\delta t$, $t_0 + \frac{5}{2}\delta t$, ..., $t_0 + \frac{1}{2}(2n-1)\delta t$ ตามลำดับ แทนค่าเวลาเหล่านี้ลงในสูตรที่ให้ความเร็วที่เวลาต่าง ๆ จะได้ว่า

$$v_1 = u + \tfrac{1}{2}a\delta t,\ v_2 = u + \tfrac{3}{2}a\delta t,\ v_3 = u + \tfrac{5}{2}a\delta t,\ ...,\ v_n = u + \tfrac{1}{2}(2n-1)a\delta t$$

บวกความเร็วเหล่านี้เข้าด้วยกัน แล้วแทนค่าในสมการที่ให้ Δx จะได้ว่า

$$\Delta x \approx \{nu + a\delta t\frac{1}{2}[1+3+5+...+(2n-1)]\}\delta t = \{nu + a\delta t \times \frac{n^2}{2}\}\delta t$$

โดยที่เราใช้เอกลักษณ์ทางพีชคณิตที่ว่า $[(1+3+5+...+(2n-1)] = n^2$

แต่ $$n\delta t = T - t_0$$

ดังนั้น $$\Delta x \approx un\delta t + \frac{1}{2}a \times (n\delta t)^2 = u(T - t_0) + \frac{1}{2}a \times (T - t_0)^2$$

ค่า Δx ที่ทำโดยวิธีนี้โดยทั่วไปจะเป็นค่าประมาณ ที่เราได้ค่าออกมาเป็นค่าที่ไม่ขึ้นกับขนาดของช่วงเวลา δt เพราะเราบังเอิญไปเลือกความเร็วที่ตรงกลางช่วงเป็นความเร็วตัวแทน และความเร็วที่ตรงกลางช่วงนี้มีค่าเท่ากับ

ความเร็วเฉลี่ยของช่วงสำหรับกรณีที่ความเร็วมีค่าเปลี่ยนไปตามเวลาอย่างสม่ำเสมอ ในกรณีทั่วไป ถ้าเราแบ่งแต่ละช่วงกว้าง การที่เราประมาณว่าความเร็วในแต่ละช่วงคงที่ก็จะผิดไปมาก ถ้าเราต้องการให้ผิดน้อยลง ๆ เราต้องแบ่งช่วงให้เล็กลง ๆ จน δt มีค่าเข้าหาศูนย์ ซึ่งหมายความว่าจำนวนช่วง n ต้องเพิ่มขึ้นจนมีจำนวนอนันต์ และเมื่อ δt มีค่าเข้าหาศูนย์ สมการข้างบนจะให้ค่า Δx ที่ถูกต้องเป็น

$$\Delta x(\text{ตั้งแต่ } t_0 \text{ ถึง } T) = u(T - t_0) + \frac{1}{2} a \times (T - t_0)^2$$

หมายเหตุ: เนื่องจาก T เป็นเวลาใด ๆ ที่ยังไม่ได้กำหนดค่าแน่นอน เราจะใช้สัญลักษณ์อะไรแทนก็ได้ และเพราะว่าเรามักใช้ t แทนเวลาใด ๆ เราจึงมักเขียนสมการบนใหม่ว่า

$$\Delta x(\text{ตั้งแต่ } t_0 \text{ ถึง } t) = u(t - t_0) + \frac{1}{2} a \times (t - t_0)^2$$

แบบฝึกหัด

สำหรับการเคลื่อนที่ในลักษณะข้างบนที่ความเร็วเปลี่ยนไปอย่างสม่ำเสมอ

$$v(\text{ที่เวลา } t) = u + a(t - t_0)$$

โดยที่ a เป็นค่าคงที่ และ t_0 คือเวลาขณะหนึ่ง จงแสดงให้เห็นว่าการกระจัดจากตำแหน่งที่อยู่ที่เวลา t_A ไปอยู่ที่ ตำแหน่งที่เวลา t_B ต่อมาหาได้จาก

$$\Delta x(\text{ตั้งแต่ } t_A \text{ ถึง } t_B) = u(t_B - t_A) + \frac{1}{2} a \times (t_B - t_A)^2$$

นอกจากนั้น ถ้า v_A และ v_B เป็นความเร็วที่เวลา t_A และ t_B ตามลำดับ จงแสดงให้เห็นว่าเราสามารถเขียนสมการข้างบนในอีกรูปหนึ่งว่า

$$\Delta x(\text{ตั้งแต่ } t_A \text{ ถึง } t_B) = \frac{1}{2}(v_B + v_A)(t_B - t_A)$$

เสร็จแล้วให้แสดงว่าความเร็วเฉลี่ย $\langle v \rangle_{t_A \to t_B}$ ในช่วงเวลาจาก t_A ถึง t_B มีค่า

$$\langle v \rangle_{t_A \to t_B} = \frac{1}{2}(v_B + v_A)$$

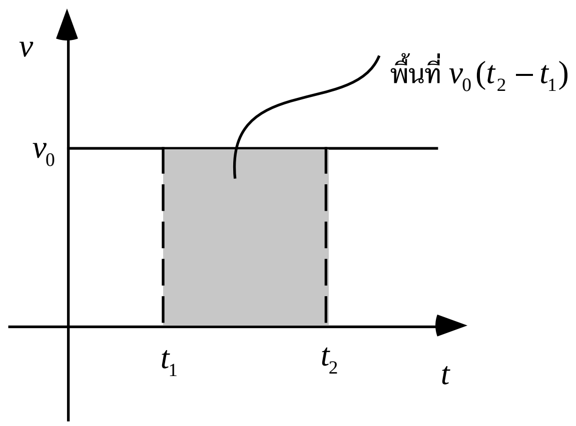
และความเร็วนี้มีค่าเท่ากับความเร็วที่เวลาตรงกึ่งกลางช่วงระหว่าง t_A และ t_B นั่นคือ

$$\langle v \rangle_{t_A \to t_B} = v(\text{ที่เวลา } \tfrac{1}{2}(t_A + t_B))$$

และให้แสดงให้เห็นด้วยว่า

$$2a\Delta x_{t_A \to t_B} = v_B^2 - v_A^2$$

2.7 การหาการกระจัดจากกราฟระหว่างความเร็วกับเวลา

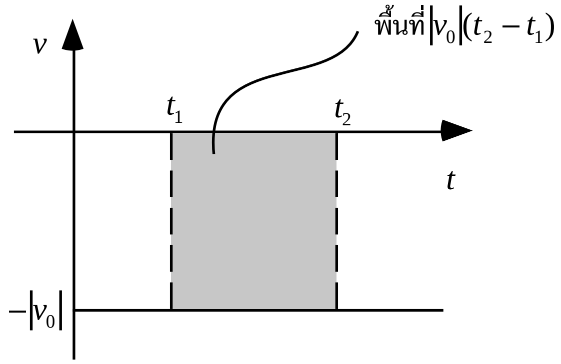


รูปที่ 2.7.1

รูปที่ 2.7.1 เป็นกราฟระหว่างความเร็วกับเวลาของการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัว v_0 ในทิศเดียวกับทิศอ้างอิง การกระจัดระหว่างเวลา t_1 และ t_2 คือ

$$\Delta x = v_0(t_2 - t_1)$$

ปริมาณนี้มีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้เส้นกราฟระหว่างเวลา t_1 และ t_2 ตามที่เห็นได้จากรูปที่ 2.7.1



รูปที่ 2.7.2

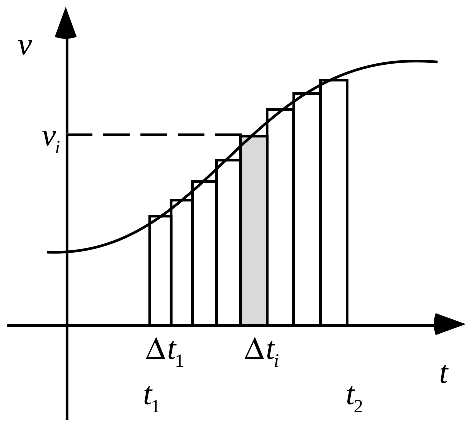
รูปที่ 2.7.2 แสดงให้เห็นกราฟการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงที่ในทิศตรงข้ามกับทิศอ้างอิง ในกรณีนี้องค์ประกอบความเร็วมีค่าเป็นลบ การกระจัดระหว่างเวลา t_1 และ t_2 คือ

$$\Delta x = -|v_0|(t_2 - t_1)$$

แต่ $|v_0|(t_2 - t_1)$ คือขนาดของพื้นที่ใต้กราฟระหว่างเวลา t_1 และ t_2 ดังนั้นในกรณีนี้การกระจัดมีขนาดเท่ากับพื้นที่ใต้กราฟ แต่มีเครื่องหมายเป็นลบ

จากทั้งสองกรณีเราอาจสรุปว่าในกรณีที่ความเร็วมีค่าคงตัว การกระจัดมีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้กราฟ แต่มีเครื่องหมายเป็นลบเมื่อเส้นกราฟอยู่ใต้แกนเวลา (ความเร็วมีค่าเป็นลบ)

จริง ๆ แล้วข้อความข้างบนเป็นจริงในกรณีที่ความเร็วมีค่าไม่คงตัวด้วย ดังในรูปที่ 2.7.3



รูปที่ 2.7.3

ในกรณีนี้พื้นที่ใต้กราฟมีค่าประมาณเท่ากับผลบวกของพื้นที่สี่เหลี่ยมเล็ก ๆ ที่ได้จากการแบ่งเวลาทั้งหมดออกเป็นช่วงเวลาเล็ก ๆ จำนวนมาก พื้นที่ของสี่เหลี่ยมที่แรเงามีขนาดเท่ากับ $v_i\Delta t_i$ ซึ่งมีค่าประมาณเท่ากับการกระจัด Δx_i ของอนุภาคในระหว่างช่วงเวลา Δt_i เราสามารถทำให้การประมาณนี้มีค่าใกล้เคียงการกระจัดที่แท้จริงได้เท่าที่เราต้องการโดยการเลือกแบ่งช่วงเวลา Δt_i แต่ละช่วงให้เล็กพอ ในกรณีที่ช่วงเวลาแต่ละช่วงเล็กมากจนเข้าใกล้ศูนย์ ผลบวกของพื้นที่สีเหลี่ยมพื้นผ้าเล็ก ๆ ทั้งหมดมีค่าเท่ากับการกระจัดทั้งหมดจากเวลา t_1 ถึง t_2 แต่ในขณะเดียวกันผลบวกของพื้นที่สี่เหลี่ยมพื้นผ้าทั้งหมดนี้ก็มีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้กราฟด้วย

แม้ว่าเราจะพิจารณาจากตัวอย่างที่องค์ประกอบความเร็วมีค่าเป็นบวก แต่ผลที่ได้ก็ยังเป็นจริงอยู่ในกรณีที่การเคลื่อนที่มีส่วนที่องค์ประกอบความเร็วมีค่าเป็นลบด้วย โดยมีข้อแม้ว่าเราต้องถือว่าพื้นที่ใต้กราฟส่วนที่อยู่ใต้แกนเวลามีเครื่องหมายเป็นลบ ดังนั้น การกระจัดทั้งหมดมีค่าเท่ากับพื้นที่ใต้กราฟ

3. ความเร่ง (ความเร็วที่เปลี่ยนไปต่อเวลา)

3.1 ความเร่งเฉลี่ย

เวลาที่เราขับรถไปตามถนนและต้องการแซงรถคันที่อยู่ข้างหน้า เราต้องเร่งเครื่องให้รถเรามีความเร็วขนาดมากขึ้น แต่ถ้าเราใช้เวลานานเกินไปในการเพิ่มความเร็ว เราอาจเจอกับรถสิบล้อก่อนที่จะแซงพ้น ดังนั้นความสามารถในการเปลี่ยนความเร็วในช่วงเวลาสั้น ๆ จริงเป็นสิ่งสำคัญ จริง ๆ แล้ว เราอาจวัดความสามารถในการเปลี่ยนความเร็วเทียบกับระยะทางที่เคลื่อนที่ไปก็ได้ ถ้ารถสามารถเปลี่ยนความเร็วได้มากในระยะทางที่สั้นก็น่าจะเรียกได้ว่ามีความเร่งมาก แต่เป็นที่ค้นพบกันภายหลังว่าปริมาณที่มีประโยชน์กว่าคือการเปลี่ยนแปลงความเร็วต่อหนึ่งหน่วยเวลาซึ่งเราเรียกว่าความเร่งเฉลี่ย เราให้นิยามชัด ๆ ดังนี้

ให้เดิมอนุภาคมีความเร็ว $\vec{v}_1$ ที่เวลา t_1 และต่อมาอนุภาคเปลี่ยนความเร็วเป็น $\vec{v}_2$ ที่เวลา t_2 ความเร่งเฉลี่ยของอนุภาคในช่วงเวลาจาก t_1 ถึง t_2 คือ

$$\text{ความเร่งเฉลี่ย } = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

เรามักใช้สัญลักษณ์ $\vec{a}_{1\to 2}$ แทนความเร่งเฉลี่ยจาก t_1 ถึง t_2 ดังนั้น

$$\vec{a}_{1\to 2} = \left(\frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}\right)_{1\to 2} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

ในระบบ SI ที่ความเร็วมีหน่วยเป็น $\mathrm{m/s}$ และเวลามีหน่วยเป็น s ความเร่งเฉลี่ยมีหน่วยเป็น $\mathrm{m/s^2}$

แบบฝึกหัด

ในการแซงรถที่อยู่ข้างหน้า รถคันหนึ่งต้องเร่งเครื่องเปลี่ยนความเร็วจาก 60 กิโลเมตรต่อชั่วโมง เป็น 80 กิโลเมตรต่อชั่วโมง ภายในเวลา 5.0 วินาที รถคันนี้มีความเร่งเฉลี่ยเท่าไรในช่วงเวลานี้

3.2 ความเร่งขณะหนึ่ง

เช่นเดียวกับความเร็วขณะหนึ่ง เราสามารถให้นิยามความเร่งขณะหนึ่งว่าคือความเร่งเฉลี่ยเมื่อช่วงเวลามีค่าน้อยมากจนเข้าหาศูนย์

$$\text{ความเร่งที่เวลา } T = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{v}(\text{ที่เวลา } T + \Delta t) - \vec{v}(\text{ที่เวลา } T)}{\Delta t}$$

โดยทั่วไปเราใช้สัญลักษณ์ $\vec{a}$ แทนความเร่งขณะหนึ่ง ดังนั้นเราเขียนสมการบนได้ใหม่ว่า

$$\vec{a}(\text{ที่เวลา } T) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{v}(\text{ที่เวลา } T + \Delta t) - \vec{v}(\text{ที่เวลา } T)}{\Delta t}$$

3.3 การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว

ในการเคลื่อนที่จากเวลา t_A ไป t_B เราพูดว่าอนุภาคเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว ถ้าความเร่งของอนุภาคที่เวลาใด ๆ ในระหว่างช่วงเวลานี้มีค่าเท่ากันหมด หรือที่เหมือนกันก็คือ ถ้าความเร่งเฉลี่ยในช่วงเวลาย่อยใด ๆ ในระหว่างเวลา t_A ถึง t_B นี้มีค่าเท่ากัน กรณีนี้ความเร่งเฉลี่ยในช่วงเวลาใด ๆ มีค่าเท่ากับความเร่งขณะหนึ่งที่เวลาใด ๆ เราได้ว่า

$$\vec{a} = \frac{\vec{v}_{t_B} - \vec{v}_{t_A}}{t_B - t_A} \qquad \text{หรือ} \qquad \vec{v}_{t_B} = \vec{v}_{t_A} + \vec{a}(t_B - t_A)$$

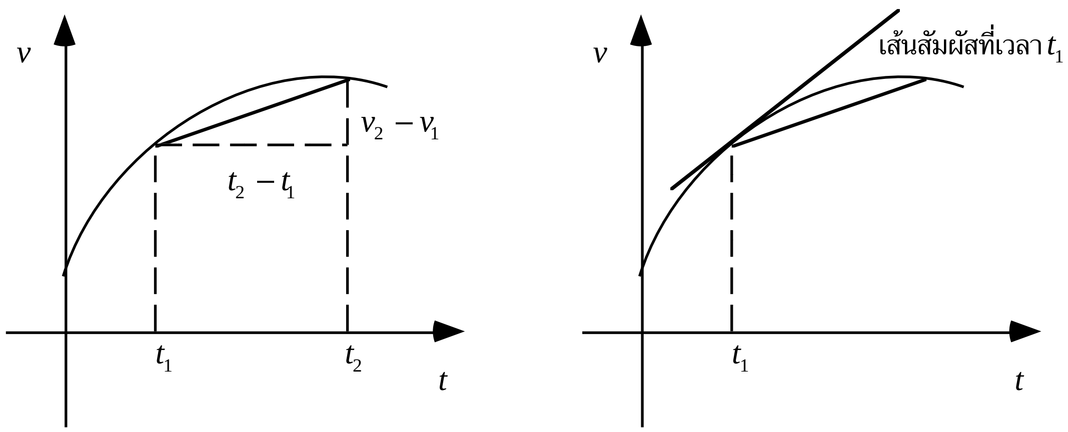
ถ้าเราให้ t_A เป็นเวลาตั้งต้น t_0 ที่ซึ่งความเร็ว $\vec{v}_A$ มีค่าเท่ากับ $\vec{u}$ และให้ t_B เป็นเวลา t ใด ๆ เราสามารถเขียนสมการข้างบนเสียใหม่ว่า

$$\vec{v}(\text{ที่เวลา } t) = \vec{u} + \vec{a}(t - t_0)$$

ซึ่งเป็นการเคลื่อนที่ซึ่งความเร็วเปลี่ยนไปอย่างสม่ำเสมอ และเราได้ทำเป็นตัวอย่างการหาการกระจัดและแบบฝึกหัดเมื่อความเร็วไม่คงตัวไปแล้ว ดังนั้นเราเอาผลที่ได้ทำไว้มาใช้ได้เลย

3.4 การหาความเร่งจากกราฟของความเร็วและเวลา

ในทำนองเดียวกับที่เราหาความเร็วเฉลี่ยและความเร็วขณะหนึ่งจากกราฟระหว่างตำแหน่งและเวลาได้ เราก็หาความเร่งเฉลี่ยและความเร่งขณะหนึ่งจากกราฟระหว่างความเร็วขณะหนึ่งกับเวลาได้ รูปที่ 3.4.1 เป็นกราฟระหว่างความเร็วของอนุภาคหนึ่งที่เวลาต่าง ๆ



รูปที่ 3.4.1 รูปที่ 3.4.2

ความเร็วเฉลี่ยระหว่างเวลา t_1 ถึง t_2 มีค่าเท่ากับความชันของเส้นตรงที่เชื่อมระหว่างจุดที่เวลา t_1 และจุดที่เวลา t_2 ของกราฟ ส่วนความเร่งที่เวลาขณะหนึ่งมีค่าเท่ากับความชันของเส้นสัมผัสกับกราฟที่เวลานั้น

3.5 การหาความเร็วที่เปลี่ยนไปจากกราฟระหว่างความเร่งกับเวลา

ในทำนองเดียวกับที่เราหาการกระจัดจากพื้นที่ใต้กราฟระหว่างความเร็วกับเวลา <u>พื้นที่ใต้กราฟของความเร่งกับเวลาจะให้ความเร็วที่เปลี่ยนไป</u>

สรุป

ในการบอกตำแหน่งทุกครั้งต้องบอก

1. เคลื่อนที่อยู่ในแนวไหน
2. จุดอ้างอิง - ไม่สามารถบอกตำแหน่งโดยไม่อ้างอิงถึงวัตถุอื่น
3. อยู่ทางไหนของจุดอ้างอิง และ
4. ห่างเป็นระยะทางเท่าไรจากจุดอ้างอิง

การเปลี่ยนตำแหน่ง

1. ต้องบอกว่าเปลี่ยนจากจุดไหน (จุดอ้างอิง)
2. ไปทางไหน (ทิศ) ของแนวใด
3. เป็นระยะทางเท่าไร

* สังเกตว่าเหมือนกับการบอกตำแหน่ง

การกระจัด

ต้องบอกว่า ไปทางไหนของแนวใด เป็นระยะเท่าไร โดยที่ไม่สนใจจุดตั้งต้น
ดังนั้นการเปลี่ยนตำแหน่งที่ไปทางเดียวกัน เป็นระยะทางเท่ากัน ถือว่าเท่ากัน

เราใช้ลูกศรแสดงการเปลี่ยนตำแหน่ง โดยที่ - ขนาดของลูกศรเป็นสัดส่วนตรงกับขนาดของการกระจัด

ทิศของลูกศรชี้ทิศเดียวกับการกระจัด

การใช้สัญลักษณ์และเครื่องหมายบวกลบ

ใช้เครื่องหมายบวก + แทนการกระจัดติดต่อกัน

ใช้เครื่องหมายเท่ากับ = แทน"การเท่าเทียมกัน"

ใช้ เลขจำนวนจริง พร้อมเครื่องหมาย แทน การกระจัด

- ใช้ เครื่องหมายบวกลบ แทน ทิศของการเคลื่อนที่
- ใช้ ขนาดของเลขจำนวนจริง แทน ขนาดของระยะทาง
- ใช้กฎการบวกเลขจำนวนจริงแทนกฎการบวกการกระจัด

ใช้สัญลักษณ์ x แทนตำแหน่ง ตำแหน่งของ A แทนด้วย x_{A}

ใช้สัญลักษณ์ Δ แทนการเปลี่ยนแปลง ซึ่งเราให้นิยามว่าคือ ของใหม่ "ลบ" ด้วยของเก่า เสมอ

ใช้สัญลักษณ์ $\Delta x_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} \equiv$ การเปลี่ยนตำแหน่งจาก A ไป B $\Delta x_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}}$

$$\Delta x_{\mathrm{A}\to\mathrm{B}} + \Delta x_{\mathrm{B}\to\mathrm{C}} = \Delta x_{\mathrm{A}\to\mathrm{C}}$$

ในการแก้ปัญหาโดยการใช้สัญลักษณ์และเครื่องหมาย จะมีขั้นตอนดังนี้

โจทย์	(ของจริง)	===> (เลขจำนวนจริง) ===>	
		(คำนวณ)	$\Downarrow$
คำตอบ	(ของจริง)	<=== (เลขจำนวนจริง)	

ระยะทางและการกระจัด

ระยะทางที่อนุภาคเคลื่อนที่คือความยาวตามเส้นทางที่อนุภาคเคลื่อนที่ ดังนั้นต้องรู้เส้นทางอย่างละเอียดว่าอนุภาคเคลื่อนที่ไปมาอย่างไร นี่คือสิ่งที่มาตรวัดระยะทางของรถยนต์อ่าน

ในทางกลับกัน รู้เพียงตำแหน่งตั้งต้นและตำแหน่งสุดท้าย ก็หาการกระจัดได้

ในการหาระยะทางเมื่ออนุภาคเคลื่อนที่กลับทิศไปมา เราทำดังนี้

แบ่งการเคลื่อนที่เป็นตอน ๆ แต่ละตอนเป็นการเคลื่อนที่ไปในทิศเดียว

เอา*ขนาด* ของการกระจัดแต่ละตอนมาบวกกัน ผลที่ได้คือระยะทางที่ต้องการ

* ข้อสังเกต

1. โดยทั่วไปแล้ว ระยะทางการเคลื่อนที่และขนาดของการกระจัดมีค่าไม่เท่ากัน
2. ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่ไปในทิศเดียวตลอดการเดินทาง ขนาดของการกระจัดและระยะทางมีค่าเท่ากัน
3. ถ้าอนุภาคเคลื่อนที่กลับมาที่เดิมแล้ว การกระจัดจะมีค่าเป็นศูนย์

อัตราเร็วเฉลี่ย

อัตราเร็วเป็นปริมาณที่ไม่มีทิศทาง (สเกลาร์) ถ้าในช่วงเวลาจาก t_i ถึง t_f วัตถุชิ้นหนึ่งเคลื่อนที่ได้ระยะทาง ℓ จะได้ว่า

$$\text{อัตราเร็วเฉลี่ย} \equiv \frac{\text{ระยะทางที่เคลื่อนที่ได้ทั้งหมด}}{\text{เวลาที่ใช้}} = \frac{\ell}{t_f - t_i} = \frac{\ell}{\Delta t}$$

* ข้อสังเกต

1. ต้องบอกว่า เฉลี่ยในช่วงเวลาไหน นั่นคือ จากเวลาใด ถึงเวลาใด
2. อัตราเร็วเฉลี่ยมีค่าเป็นบวกเสมอเพราะว่าระยะทางและช่วงเวลามีค่าเป็นบวก

ความเร็วเฉลี่ย

ความเร็วเป็นปริมาณที่ต้องบอกทั้งทิศทางและขนาด (เวกเตอร์)

$$\text{ความเร็วเฉลี่ย} \equiv \frac{\text{การกระจัดที่เคลื่อนที่ได้}}{\text{ช่วงเวลาที่ใช้}}$$

ถ้าที่เวลา t_i วัตถุชิ้นหนึ่งอยู่ที่คำแหน่ง x_i และต่อมาที่เวลา t_f วัตถุอยู่ที่ตำแหน่ง x_f จะได้ว่า

$$\langle v \rangle_{i \to f} \equiv \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i} \qquad \text{หรือ} \qquad \langle v \rangle_{i \to f} = \left(\frac{\Delta x}{\Delta t} \right)_{i \to f} \qquad \text{เขียนสั้น ๆ ว่า} \quad \langle v \rangle = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

ความเร็วเฉลี่ยมีทิศเดียวกับทิศของการกระจัด

การเคลื่อนที่อย่างสม่ำเสมอ หรือการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัวคือการเคลื่อนที่ซึ่งความเร็วเฉลี่ยในช่วงใดก็ได้ในช่วงที่พิจารณานั้นมีค่าเท่ากันหมด

การเคลื่อนที่ด้วยอัตราเร็วคงตัวคือการเคลื่อนที่ซึ่งอัตราเร็วเฉลี่ยในช่วงใดก็ได้ในช่วงที่พิจารณานั้นมีค่าเท่ากันหมด

อัตราเร็วขณะหนึ่งและความเร็วขณะหนึ่ง

$$\text{อัตราเร็วที่เวลา } t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\ell}{\Delta t}$$

ความเร็วขณะหนึ่งคือความเร็วเฉลี่ยที่หาค่าสำหรับช่วงเวลาที่มีค่าเข้าใกล้ศูนย์

$$\text{ความเร็วที่เวลา } t = v(\text{ที่เวลา } t) = \frac{x(\text{ที่เวลา } t + \Delta t) - x(\text{ที่เวลา } t)}{\Delta t} \quad \text{เมื่อ } \Delta t \to 0$$

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

* ขนาดของความเร็วขณะหนึ่งมีค่าเท่ากับขนาดของอัตราเร็วขณะนั้น

การหาการกระจัดและระยะทางจากความเร็วและอัตราเร็ว

- ถ้ารู้อัตราเร็วเฉลี่ย ระยะทาง = อัตราเร็วเฉลี่ย × ช่วงเวลาที่ใช้
- ถ้ารู้ความเร็วเฉลี่ย การกระจัด = ความเร็วเฉลี่ย × ช่วงเวลาที่ใช้
- เมื่ออัตราเร็วหรือความเร็วมีค่าไม่คงตัว
  - แบ่งการเคลื่อนที่ออกเป็นช่วง ๆ
  - แต่ละช่วงอัตราเร็วหรือความเร็วคงตัว หรือประมาณว่าคงตัว

-นำมารวมกันเป็นระยะทางหรือการกระจัดทั้งหมดที่ต้องการแล้วแต่กรณี

$$\ell_{\text{ทั้งหมด}} = \ell_1 + \ell_2 + \ell_3 \ldots\ldots \qquad \langle v \rangle = \frac{\ell_{\text{ทั้งหมด}}}{\Delta t}$$

และ

$$\Delta x_{\text{ทั้งหมด}} = \Delta x_1 + \Delta x_2 + \Delta x_3 \ldots \qquad \langle v \rangle = \frac{\Delta x_{\text{ทั้งหมด}}}{\Delta t}$$

$$\text{ความเร่งเฉลี่ย} = \langle a \rangle = \frac{v_f - v_i}{t_f - t_i}$$

ความเร่งขณะหนึ่งคือความเร่งเฉลี่ยที่หาค่าสำหรับช่วงเวลาที่มีค่าเข้าใกล้ศูนย์

$$a(\text{ที่เวลา } t) = \frac{v(\text{ที่เวลา } t + \Delta t) - v(\text{ที่เวลา } t)}{\Delta t} \text{ เมื่อ } \Delta t \to 0 \quad \text{หรือ} \quad a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

การเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัวในแนวตรง

ความเร็วใหม่ = ความเร็วเก่า + ความเร่ง × ช่วงเวลาที่เปลี่ยนไป $\qquad v(\text{ที่เวลา } t) = u + a(t - t_0)$

ความเร็วเฉลี่ย = (ความเร็วต้น + ความเร็วปลาย)/2 $\qquad \langle v \rangle_{t_A \to t_B} = \frac{1}{2}(v_B + v_A)$

การกระจัด = ความเร็วเฉลี่ย × ช่วงเวลาที่เปลี่ยนไป $\qquad \Delta x = \langle v \rangle \Delta t$

$$\Delta x(\text{จาก } t_A \text{ ถึง } t_B) = u(t_B - t_A) + \frac{1}{2} a \times (t_B - t_A)^2 \qquad 2a\Delta x_{t_A \to t_B} = v_B^2 - v_A^2$$

กราฟกับการเคลื่อนที่

- ความเร็วเฉลี่ยระหว่างเวลาสองเวลาใด ๆ สามารถหาได้จากกราฟระหว่างตำแหน่งกับเวลา โดยการคำนวณค่าของความชันของเส้นตรงที่ลากเชื่อมพิกัดของจุดทั้งสอง
- ความเร็วขณะหนึ่งที่เวลาใด ๆ สามารถหาได้จากกราฟระหว่างตำแหน่งกับเวลา โดยการคำนวณค่าความชันของเส้นตรงที่ลากสัมผัสกับเส้นโค้งของกราฟที่เวลานั้น
- ความเร่งขณะหนึ่งของวัตถุที่เวลาขณะหนึ่งคือความชันของกราฟ v กับ t ที่เวลาขณะนั้น ค่านี้อาจเป็นบวก ลบ หรือศูนย์ก็ได้
- สำหรับการเคลื่อนที่ด้วยความเร็วคงตัว กราฟ x กับ t เป็นเส้นตรง สำหรับการเคลื่อนที่ด้วยความเร่งคงตัว กราฟ v กับ t เป็นเส้นตรง
- โดยทั่วไป ความชันที่ขณะเวลาใด ๆ ของกราฟระหว่างระยะทางกับเวลาคืออัตราเร็ว
- พื้นที่ใต้กราฟของกราฟระหว่างความเร็วกับเวลามีค่าเท่ากับการกระจัด
- พื้นที่ใต้กราฟของกราฟระหว่างความเร่งกับเวลามีค่าเท่ากับความเร็วที่เปลี่ยนไป